

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 001.891.57: 534.1:539.3

На правах рукописи

СЕРГАЛИЕВ АЛМАЗ СЕРИКОВИЧ

**Моделирование нелинейной и стохастической динамики буровых штанг
неглубинного бурения**

6D070500 – Математическое и компьютерное моделирование

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор Хаджиева Л.А.

Зарубежный научный консультант
DSc, профессор Каплунов Ю.Д.

Республика Казахстан
Алматы, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ	4
ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ..	12
2 РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ СЖАТО-СКРУЧЕННЫХ БУРОВЫХ ШТАНГ РАЗЛИЧНОЙ ТОПОЛОГИИ И РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ИХ АНАЛИЗА	22
2.1 Разработка модели движения сжато-скрученной буровой штанги при малых деформациях	22
2.2 Многопараметрический анализ линейной модели сжато-скрученной буровой штанги	24
2.2.1 Многопараметрический асимптотический анализ	25
2.2.2 Метод многих масштабов и низкочастотные колебания	27
2.2.3 Дисперсионные кривые и их численный анализ	30
2.2.4 Пример краевой задачи	37
2.3 Метод обобщенных функций для уравнений динамики буровой штанги....	39
2.3.1 Постановка задачи	39
2.3.2 Обобщенное решение краевой задачи	27
2.3.3 Фундаментальное решение и его свойства	41
2.3.4 Разрешающие уравнения краевой задачи.....	44
2.4 Потенциал упругого деформирования стержневых элементов при конечных деформациях	45
2.5 Разработка модели движения сжато-скрученной буровой штанги при конечных деформациях для изгибно-крутильных колебаний.....	50
2.6 Численный анализ нелинейной модели движения сжато-скрученной буровой штанги	57
2.6.1 Анализ плоских колебаний буровой штанги	57
2.6.2 Анализ пространственных колебаний буровой штанги.....	70
2.7 Краткие выводы по разделу	86
3 МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ БУРОВОЙ ШТАНГИ С УЧЕТОМ ОСЛОЖНЯЮЩИХ ФАКТОРОВ	88
3.1 Модель движения буровой штанги с учетом начальной кривизны.....	88
3.1.1 Разработка модели пространственных изгибных колебаний.....	88
3.1.2 Численный анализ частного случая плоских изгибных колебаний....	91
3.2 Модель движения вертикальной буровой штанги с учетом влияния сил трения о стенки скважины.....	94
3.2.1 Модель упругого деформирования буровой штанги	94
3.2.2 Численный анализ модели	99
3.3 Модель движения горизонтальной буровой штанги с учетом влияния сил трения о стенки скважины.....	106

3.4 Модель движения буровой штанги с учетом особенностей низа бурильной колонны	108
3.4.1 Модель упругого деформирования буровой штанги	108
3.4.2 Формирование граничных условий	110
3.4.3 Численный анализ модели	112
3.5 Краткие выводы по разделу	117
4 СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ БУРОВЫХ ШТАНГ	118
4.1 Анализ колебаний сжато-скрученной буровой штанги с учетом случайной начальной кривизны.....	118
4.2 Динамика горизонтальной буровой штанги с учетом случайной силы трения	121
4.2.1 Дискретная и стохастическая модели.....	121
4.2.2 Численный анализ модели	123
4.3 Динамика вертикальной буровой штанги с учетом случайной силы трения	124
4.4 Краткие выводы по разделу	127
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	128
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	130

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:
Закон Республики Казахстан «О науке» от 18.02.2011 г. № 407-IV ЗРК;
ГОСО РК 5.04.034-2011: Государственный общеобязательный стандарт образования Республики Казахстан. Послевузовское образование. Докторантура. Основные положения (изменения от 23 августа 2012 г. № 1080);
ГОСТ 7.32-2001 (изменения от 2006 г.). Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления;
ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$N(z, t)$	– продольная сжимающая нагрузка;
$M(z, t)$	– крутящий момент;
U_p	– потенциальная энергия стержня;
U_k	– кинетическая энергия;
W	– потенциал внешних сил,
L, l	– длина буровой штанги,
$u(z, t), v(z, t)$	– компоненты поперечных перемещений поперечного сечения,
$\theta(z, t)$	– закручивание поперечного сечения,
U, V, W	– компоненты перемещения,
ε_{ij}	– компоненты тензора деформаций,
σ_{ij}	– компоненты тензора напряжения,
E	– модуль упругости,
G	– модуль сдвига,
ν	– коэффициент Пуассона,
Φ	– упругий потенциал,
D	– внешний диаметр буровой штанги,
d	– внутренний диаметр буровой штанги,
ρ	– плотность материала,
A	– площадь поперечного сечения буровой штанги,
ω	– угловая скорость вращения штанги,
J, I_x, I_y	– осевые моменты инерции поперечного сечения,
u_0, v_0	– начальные искривления буровой штанги,
K_h	– жесткость Герца,
БШ	– буровая штанга,
ОДУ	– обыкновенное дифференциальное уравнение.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Среди основных энергоносителей в современном мире нефть занимает особое место, оставаясь при этом еще стратегически важным продуктом, оказывающим значительное влияние на мировую экономику. Нарастание объемов добычи нефти, их интенсивность, эффективность и безопасность напрямую зависят от уровня развития оборудования, применяемого в нефтегазодобывающей промышленности и режимов его эксплуатации.

По энерго и трудоемкости среди основных этапов в добыче нефти можно выделить этап бурение скважин. Он связан с большими затратами труда, времени и средств. На технико-экономические показатели буровых работ влияют такие факторы, как совершенство буровых машин и инструментов, организация их режимов нагружения и работы, влияние окружающей среды на движения бурового инструмента и др. При этом из практики буровых работ известно, что до 30% пробуренных скважин бракуются по причине их искривления или поломки буровых штанг. Происходит это по причине сложных колебательных процессов и явлений в работе буровых штанг, обусловленных техническими, технологическими и геологическими факторами – большие пространственные перемещения буровых штанг в результате сложного взаимодействия их начальной кривизны, действия нелинейных инерционных сил, переменности осевых нагрузок, действующих на буровую штангу, переменности крутящего момента и, как следствие, потеря динамической устойчивости штанги; влияние сил контактного взаимодействия бура с разрушаемой породой, буровой штанги со стенками скважины, которые, как правило, носят случайный характер; действие сил контактного трения и другие осложняющие факторы. Все они требуют тщательного исследования влияния указанных факторов на динамику бурильных штанг с целью обеспечения их устойчивости и безопасности режимов бурения скважин.

Современное состояние указанных проблем мало изучено. В основном исследования производятся при наложении тех или иных ограничений, допущений, приводящих к линейности математической модели движения буровой штанги, что существенно сужает круг рассматриваемых проблем и дает лишь их первое приближение. При этом протяженность буровой штанги ведет к геометрической нелинейности происходящих в ней деформационных процессов, а внесение фактора случайности в контактные задачи более реалистично отражает происходящие физические явления, усложняя при этом математическую сторону их решения. Имеющиеся математические модели, как правило, не допускают всестороннего качественного и количественного анализа буровых колонн. Необходимы разработки современных математических моделей движения буровых штанг с позиций теории нелинейных деформируемых сред, применение современных математических методов их решения с применением высокопроизводительных вычислительных комплексов и пакетов визуализации для анализа динамики бурильных штанг на

ранних этапах проектирования с целью обеспечения безаварийных работ по бурению скважин.

Таким образом, **актуальность темы исследования** не вызывает сомнений, представляет научный и практический интерес.

Цель работы: моделирование нелинейной и стохастической динамики буровых штанг неглубинного бурения в нефтегазодобывающей отрасли с учетом осложняющих факторов и окружающей среды, их анализ.

В связи с поставленной целью вытекают **следующие задачи исследования:**

– Разработка модели движения сжато-скрученной буровой штанги при малых деформациях и ее многопараметрический асимптотический анализ, как первое приближение.

– Разработка нелинейной модели движения сжато-скрученной буровой штанги при конечных деформациях для изгибно-крутильных колебаний различной топологии, ее численный анализ.

– Разработка нелинейных моделей движения буровой штанги, осложненных ее начальной кривизной и действием факторов окружающей среды (сил трения штанги о стенки скважины, с учетом особенностей низа буровой колонны) и их численный анализ.

– Исследование стохастических колебаний буровых штанг при действии осложняющих факторов случайного характера (случайной начальной кривизны буровой штанги, случайной силы трения штанги о стенки скважины).

Объект исследования. Объектом исследования являются буровые штанги, применяемые в нефтегазодобывающей промышленности для бурения неглубинных скважин, находящаяся под влиянием внешних сил и окружающей среды.

Предмет исследования. Предметом исследования являются нелинейные и стохастические колебания преднапряжённых буровых штанг с учетом осложняющих факторов при конечных деформациях.

Методы исследований: апробированные фундаментальные методы теоретической механики; современные методы нелинейной механики деформируемых сред и теории колебаний; вариационные методы; современные численные методы; пакеты символьных вычислений для численного моделирования и визуализации технологических процессов.

Для многопараметрического анализа низкочастотных колебаний буровой штанги использован метод многих масштабов. Для аналитического решения линейной модели движения буровой штанги применен метод обобщенных функций. Разработка нелинейной модели движения сжато-скрученных буровых штанг с учетом осложняющих факторов основана на применении вариационного принципа Остроградского-Гамильтона в рамках теории конечных деформаций В.В. Новожилова. Ввиду сложности полученной модели ее прямое интегрирование не представляется возможным. Поэтому система нелинейных уравнений движения с распределенными параметрами методом Бубнова-Галеркина приведена к системе обыкновенных дифференциальных

уравнений (ОДУ), которая численно реализована в пакете символьных вычислений Wolfram Mathematica. При исследовании влияния случайных сил трения на динамику буровых штанг на основе метода сосредоточенных масс строилась дискретная стохастическая модель.

Научная новизна работы состоит в разработке новых нелинейных динамических моделей деформируемых систем с учетом конечности деформаций, в условиях действия осложняющих факторов случайного характера применительно к решению широко класса задач нелинейной и стохастической динамики бурового оборудования на новом качественном уровне, применяя современные методы математического моделирования и компьютерной визуализации полученных результатов.

Научные положения, выносимые на защиту

– многопараметрический анализ классических линейных случаев плоских и пространственных изгибных колебаний буровой штанги, основанный на соотношениях между крутящим моментом и продольной силой, частотой и длиной волны, а также наличием вращения, который позволяет установить общую классификацию изгибных колебаний сжато-скрученной вращающейся буровой штанги и для выбранных диапазонов параметров построить дисперсионные кривые приближенного решения;

– применение аппарата теории обобщенных функций для анализа плоских изгибных колебаний буровой штанги, решение которых дает возможность определять напряженное состояние стержневых конструкций при разнообразии их геометрических и физических параметров, на всем диапазоне частот колебаний, воздействии на буровую штангу сосредоточенных силовых источников, что эффективно для решения обратных и полу-обратных задач;

– новые нелинейные математические модели изгибно-крутильных колебаний сжато-скрученной буровой штанги различной топологии и их динамический анализ;

– новые модели нелинейной динамики буровых штанг с учетом осложняющих факторов: начальная кривизна штанги, трение буровой штанги о стенки скважины, особенность низа буровой колонны, их численный анализ;

– стохастические колебания буровых штанг и их анализ.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертационной работы подтверждается использованием основных фундаментальных законов и соотношений механики деформируемого твердого тела при построении математических моделей; сопоставлением и удовлетворительным согласованием полученных моделей и результатов исследования с результатами работ других авторов.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке новых математических моделей движения буровых штанг, применяемых в нефтегазодобывающей промышленности, в развитии методов их решения и анализа, обобщении результатов исследований для бурового оборудования в других отраслях промышленности.

Практическая значимость диссертационных исследований состоит в том, что применение современных методов математического моделирования и компьютерных технологий максимально приближает полученные результаты к реальным процессам, позволяет с высокой точностью прогнозировать поведение бурового оборудования, обеспечивая эффективность и надежность бурения скважин в нефтегазодобывающей отрасли.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами. Данная работа выполнена в рамках проектов программы грантового финансирования фундаментальных исследований в области естественных наук «Разработка математических моделей нелинейных деформируемых сред для решения задач физических процессов в добывающей промышленности» (2012-2014 гг., №ГР 0112РК01496), «Разработка нелинейных динамических моделей деформируемых сред и их практическое применение для решения задач бурения в нефте-газодобывающей отрасли с учетом неопределенностей, осложняющих факторов и влияния окружающей среды» (2015-2017 гг., №ГР 0115РК00755).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих мероприятиях:

- Международная конференция «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения» (ИМАШ РАН, Москва, Россия, апрель 2013 г.);
- V Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов» (ИМЕТ им. Байкова РАН, Москва, Россия, 2013 г.);
- VIII Казахстанско-Российская Международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли» (Атырау, 20-21 июня 2014 г.)
- International Conference on Application of Materials Science and Environmental Materials (Yichang, China, July 4-6, 2014);
- The 5th International Conference on Mechanics, Simulation and Control (St. Petersburg, Russian Federation, June 14-15, 2015);
- 10th International Conference on Vibration Engineering and Technology of Machinery (The University of Manchester, Manchester, England, September 9-11, 2015);
- XII International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms (Liberec, Czech Republic, September 6-8, 2016);
- VII Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы урановой промышленности» (Астана, 3-5 августа 2017 г.)
- IX Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы урановой промышленности» (Алматы, 7-9 ноября 2019 г.);

- научные семинары механико-математического факультета КазНУ им. аль-Фараби (2013-2019 гг., Алматы);
- научные семинары кафедры математического и компьютерного моделирования КазНУ им. аль-Фараби (2013-2019 гг., Алматы).

Публикации

По теме диссертации автором было опубликовано 16 работ [18, 19, 33, 44, 45, 58, 59, 68, 79, 81, 82, 124, 126, 137-139], в том числе 4 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных результатов научной деятельности [59, 81, 82, 124]; 6 публикации в научных журналах и трудах международных конференций, индексируемых базой данных Scopus [18, 19, 33, 58, 68, 79], среди которых 1 публикация с ненулевым импакт-фактором (IF 9.052); 9 публикаций в трудах зарубежных и отечественных научных конференций, среди которых 3 публикации в материалах зарубежных конференций [33, 68, 79], 3 публикации в трудах всероссийских научных конференций [44, 45, 126], 3 публикации в материалах отечественной конференции [137-139].

Опубликованные по теме диссертации работы приводятся в списке литературы.

Личный вклад автора

Основные результаты исследований, изложенные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. В совместной статье [58] соискателем была проделана основная часть работы, соавторы участвовали в постановке задачи и обсуждении результатов. В [126] соискателем была поставлена задача и разработана математическая модель, соавтору Умбеткуловой А.Б. принадлежит численная реализация модели и обсуждение результатов. В работах [44, 45] соавторам принадлежит постановка задачи и реализация метода Бубнова-Галеркина, соискателю – численная реализация модели и анализ результатов. В статьях [18, 19] соискатель внес вклад в построении модели и анализ результатов, а соавтором Умбеткуловой А.Б. помимо общего вклада в постановочную часть задачи, был внесен вклад в качестве моделирования резонансных режимов колебаний буровой штанги и получения амплитудно-частотных характеристик.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из титульного листа, содержания, обозначений и сокращений, введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников из 139. Общий объем диссертации составляет 140 страниц, включая 72 иллюстрации и 1 таблицу.

Основное содержание диссертации

Во введении отражены следующие моменты: актуальность темы диссертационного исследования, основная цель работы, объект, предмет и методы исследования, научная новизна, научно-практическое значение диссертационной работы, степень ее разработанности.

В первом разделе описывается современное состояние исследуемой проблемы, проводится обзор существующих работ в области исследования динамики буровых колонн.

Во втором разделе разработаны модели движения сжато-скрученных буровых штанг при малых и конечных деформациях. Приводятся основные положения и соотношения нелинейной теории упругости В.В. Новожилова. В случае малых деформаций был проведен многопараметрический анализ системы, для случая плоских изгибных колебаний был применен аппарат теории обобщенных функций. Для нелинейной модели был проведен численный анализ для случаев плоских и пространственных колебаний.

Третий раздел связан с разработкой нелинейных математических моделей динамики колебаний буровых колонн с учетом таких осложняющих факторов как: начальная кривизна буровой колонны, контакт колонны со стенкой скважины, собственный вес и т.д. Проводится численный анализ моделей и изучается влияние параметров системы на колебания колонны.

В четвертом разделе исследуются разработанные ранее нелинейные математические модели колебаний буровых колонн при условии случайности одного из факторов. Рассмотрены случайная начальная кривизна колонны и случайный коэффициент трения. Проведены несколько симуляций Монте-Карло.

В заключении приводятся основные результаты и выводы, полученные в диссертационной работе.

Благодарность

Автор выражает глубокую признательность отечественному научному консультанту д.ф.-м.н., профессору Хаджиевой Леле Азретовне за научное руководство, неоценимую помощь и ценные советы на всех этапах выполнения диссертационной работы и зарубежному научному консультанту DSc, профессору Каплунову Юлию Давидовичу за поддержку, плодотворную работу и теплый прием во время научных стажировок (Килский университет, Великобритания).

1 СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Интенсивное освоение недр Земли, характеризующееся ростом добычи нефти и природного газа, делает нефтегазовую отрасль одной из ведущих отраслей в Казахстане и во всем мире, внося огромный вклад в развитие экономики. Казахская нефтегазовая промышленность с момента первой добычи нефти на месторождение Карашагул в 1899 года и по сегодняшний день быстро развивается и требует постоянного совершенствования бурового оборудования.

Сегодня основным способом добычи нефти и газа является использование скважин. При разработке этих скважин одним из составляющих этапов является процесс бурения скважины. Естественно, что в реалиях современного рынка при все возрастающих объемах добычи необходимо осуществлять качественное строительство скважин при кратном снижении сроков их проводки, трудо- и энергоёмкости процесса и капитальных затрат с целью обеспечить народное хозяйство страны достаточными объемами нефти и газа [1, 2].

Процесс бурения скважин всегда был и остается чрезвычайно капиталоемким. Из практики буровзрывных работ известно, что 30% пробуренных скважин бракуется из-за поломки буровых штанг и искривления скважин, зависящих от режима бурения. Одним из главных факторов браковки скважины является ее искривление. До настоящего времени еще не существует единой модели, описывающей искривления скважины. При исследовании искривления скважин необходимо, прежде всего, изучить природу этого явления. Интенсивность искривления определяется действием многочисленных факторов, которые можно разделить на три группы: геологические, технологические и технические [3, 4]. К факторам технической природы можно отнести: действие больших инерционных сил; наличие начальной кривизны штанги, концентраторов напряжений; взаимодействие с окружающей средой; переменность внешних осевых сил и крутящих моментов, действующих на вращающуюся буровую штангу и др. В качестве геологических факторов может послужить условия залегания пород и различие в их твердости или буримости. Таким образом поиск резервов повышения эффективности буровых работ - важнейшая задача, которая в связи с кризисными явлениями в экономике Казахстана стала еще более актуальной.

По характеру разрушения породы, применяемые способы бурения делятся на: механические — буровой инструмент непосредственно воздействует на горную породу, разрушая её, и немеханические — разрушение происходит без непосредственного контакта с породой источника воздействия на неё (термическое, взрывное и др.). Механические способы бурения подразделяют на вращательные и ударные (а также вращательно-ударные и ударно-вращательные). При вращательном бурении порода разрушается за счёт вращения прижатого к забою инструмента, в основном применяется для разведочного бурения. В зависимости от прочности породы при вращательном бурении применяют буровой породоразрушающий инструмент режущего типа:

алмазный буровой инструмент; дробовые коронки, разрушающие породу при помощи дроби. Ударные способы бурения разделяются на: ударное бурение или ударно-поворотное (бурение перфораторами, в том числе погружными, ударно-канатное, штанговое и т.п., при которых поворот инструмента производится в момент между ударами инструмента по забою); ударно-вращательное (погружными пневмо- и гидроударниками, а также бурение перфораторами с независимым вращением и т.п.), при котором удары наносятся по непрерывно вращающемуся инструменту; вращательно-ударное, при котором породоразрушающий буровой инструмент находится под большим осевым давлением в постоянном контакте с породой и разрушает её за счёт вращательного движения по забою и периодически наносимых по нему ударов. Немеханические способы (гидравлический, термический, электрофизический) находятся в стадии разработки и для бурения нефтяных и газовых скважин в настоящее время не применяются [5].

Нефтяные и газовые скважины сооружаются методом вращательного бурения. Технология вращательного бурения состоит из следующих основных операций:

- вращение и продольная подача породоразрушающего инструмента по мере углубления скважины;
- промывка скважины и вынос разрушенной породы на поверхность;
- наращивание бурильной колонны по мере углубления скважины;
- подъем и спуск в скважину бурильной колонны для смены породоразрушающего инструмента и забойного двигателя;
- приготовление, обработка и очистка промывочного раствора;
- спуск обсадных колонн для крепления скважины.

Обязательным элементом буровой установки является буровая штанга, которая предназначена для передачи крутящего момента и осевого усилия непосредственно к породоразрушающему инструменту. Буровые штанги, как и элементы конструкций во многих отраслях техники, сводятся к расчетной схеме стержня, надежность работы которых во многом зависит от точности их расчета с учетом условий работы и механических свойств самих элементов.

Среди Казахстанских ученых, работающих в данной области исследования, можно отметить Жумабаева М.Ж., Бараева А., Сарсенбаева Х.А., Нугуманова К.К., Мендебаева Т.М. и др. Предметом их исследований является колебательный процесс буровых штанг, возникающий при бурения нефтяных и газовых скважин, с выдачей рекомендации по совершенствованию деталей и их соединений при конструировании бурового оборудования.

Сарсенбаева Х.А. [6] вместе с соавторами установили важность рецептур буровых растворов при бурении скважин с горизонтальным окончанием и предложили использовать буровые растворы на биополимерной основе, отвечающих всем требованиям, предъявляемым к бурению.

Жумабаев М.Ж., Бараев А. и их соавторы в работе [7] исследуется влияние замковых соединений буровой колонны на ее вынужденный колебательный процесс. Даны рекомендации по выбору материала трубы и вида используемого

материала замковых соединений. В работе [8] на основе определенных допущений была получена линейная модель продольных колебаний бурильных колонн при выполнении спускоподъемных операциях. Изучаются колебания бурильной колонны, по всей длине которой действует сила вязкого сопротивления, а некоторые сечения находятся, кроме вязкого сопротивления, в локальном упругом контакте с внешней средой с учетом сил контактного взаимодействия и исследуется характер продольных колебаний в [9].

От качества проведения технологических операций и эффективности последующей эксплуатации нефтяных и газовых скважин зависит работоспособность буровых насосов, поэтому в работе [10] рассматриваются новые возможности в совершенствовании элементов конструкции поршней буровых насосов в контексте дальнейшего совершенствования работоспособности буровых насосов. Авторами были предложены способы совершенствования конструктивных элементов бурового оборудования с целью увеличения их долговечности.

Максимальная нагрузочная способность соединения деталей долота буровых колонн выявляется определением величины напряжений в любой точке детали буровых долот в работе [11].

Работы по исследованию динамики бурильных колонн зарубежных ученых в основном направлены на моделирование и анализ вибраций буровых колонн, вызывающих потерю устойчивости движения бурового оборудования и нарушение их прочностных свойств [12-17]. В том же направлении работает группа Казахстанских ученых [18-21]. Причиной искривления скважин, приводящей их к негодности, служит потеря устойчивости прямолинейной формы бурильных колонн.

Wilderman G. [22] и Верслюис Д. [23] считают, что скорость подачи инструмента к забою и механическая скорость бурения зависят от рациональных сочетаний таких параметров, как осевая нагрузка на долото и скорость его вращения и угла закручивания буровой штанги. Поэтому, получить наибольшую производительность в забое при рациональном выборе необходимых параметров можно затратив минимальную энергию, которую следует принимать за оптимальную. При этом, как отмечает Lunberg В. [24], часть энергии расходуется на преодоление силы трения штанги о скважину и поглощается в соединительных муфтах, и в итоге потери энергии при передаче от буровой машины к разрушаемой породе могут достигать от 20% до 50%. Поэтому изучение устойчивости и колебаний буровых штанг при эксплуатации является актуальной проблемой.

Одним из распространенных допущений при исследовании динамики бурильных колонн является наложение ограничений на величины деформаций, то есть допущение их малости, что ведет к линеаризации моделей [12-15].

Для динамической модели осевых и поперечных колебаний вращающейся бурильной колонны, с помощью метода Лагранжа получены нелинейные уравнения, полностью сочетающиеся с переменными воздействующими факторами [13]. Они включают в себя эффект гироскопических моментов,

связанных со стенкой скважины, осевые возбуждения долота, формирование взаимодействия и гидродинамического затухания в связи с наличием буровых растворов вне бурильной колонны. Результаты моделирования показывают, что параметрический резонанс и вращение могут происходить одновременно в пределах рабочих условий бурения. Динамическое поведение имеет достаточно сложную природу и может оказаться непериодическим, предположительно хаотическим.

Так в работе [25] проводится анализ влияния скорости потока бурового раствора, веса бурильной колонны, нагрузки на долото и угловой скорости на устойчивость и колебания бурильной колонны. В работе исследуются продольные и изгибные колебания вращающейся бурильной колонны. Для анализа устойчивости бурильной колонны используется линейный подход при различной нагрузке на долото, угловой скорости, скорости потока бурового раствора и механизмов стабилизаторов. Авторами было установлено, что увеличение нагрузки на долото приводит к уменьшению собственных частот и увеличению амплитуды колебаний. Кроме того, увеличение расхода бурового раствора приводит к уменьшению собственных частот и амплитуды колебаний. Таким образом, для выбора наиболее безопасных условий работы в процессе бурения могут быть использованы комбинации этих технических характеристик.

Линейная задача колебаний вращающейся балки Тимошенко для определения собственных частот свободных поперечных колебаний балки изучена в [26]. В работе авторы сравнивают численные решения, полученные методом дифференциальных квадратур и методом конечных элементов.

Значительный вклад в исследования линейных динамических задач колебаний бурильных колонн с учетом различных осложняющих факторов внесли ученые постсоветского пространства, среди них можно отметить украинскую школу во главе с Гуляевым В.И. [14, 15, 27-32].

В работе [27] исследуется волновая модель линейных крутильных колебаний вращающихся бурильных колонн. Получены условия для возникновения и развития автоколебательных процессов. Установлены диапазоны скорости вращения, в которых происходят автоколебания, бифуркации Андронова-Хопфа происходят в пределах этих диапазонов.

В работе [28] в рамках линейной теории исследуется проблема динамического изгиба удлиненных буровых колонн. Были учтены такие факторы, как продольная неоднородная предварительная нагрузка, действие крутящего момента, силы инерции вращения и внутренних потоков промывочной жидкости (бурового раствора). В результате проведенного анализа, построена природа волн и режимов вибрации, рассчитываются их частоты. Через изучение соответствующих уравнений дисперсии показано, что свободные изгибные колебания неограниченного стержня могут быть реализованы только в режиме регулярных правосторонних и левосторонних спиральных волн, распространяющихся с разными скоростями в разных направлениях. Режимы свободных колебаний ограниченной бурильной

колонны обладают более сложными формами нерегулярной спирали. В работе [33] для более глубокого исследования особенностей динамического процесса, была изучена многопараметрическая природа системы.

Проблема упругой деформации бурильных колонн в глубоких криволинейных скважинах с геометрическими несовершенствами осевой линии формулируется в [29]. Дефекты рассматриваются в виде локализованных спиралей. Были проанализированы соотношения между силами сопротивления движению колонны, амплитудами и местами локализации дефектов. Установлен эффект захвата бурильной колонны для распределенных сил контактного взаимодействия и трения между бурильной колонной и поверхностью буровой скважины. Было установлено, что с увеличением резистивных сил и их моментов возрастает и амплитуда дефектов.

Задача о выпучивании удлиненного сжато-растянутого закрученного вращающегося стержня, содержащего внутренний поток однородной жидкости рассмотрена в [14, 30]. С помощью полученных линейных разрешающих уравнений моделируется устойчивость колонн глубокого бурения. В результате авторами были построены формы потери устойчивости и определены критические значения параметров системы, определяющие ее упругое равновесие.

В работе [31], используя теорию криволинейных гибких стержней, изучен упругий изгиб бурильных колонн с геометрическими несовершенствами осевых линий в глубоких искривленных скважинах. Проведен численный анализ зависимости силы, противостоящей движению бурильной колонны, от амплитуды колебаний и расположения геометрических несовершенств.

В работе [32] рассматривается проблема квазистатической устойчивости удлиненных буровых колонн, изученных при учете дестабилизирующих последствий продольной неоднородной предварительной нагрузки, действия крутящего момента, силы инерции вращения и внутренних потоков промывочной жидкости. Получены линейные уравнения движения центральной оси буровой колонны, и предлагаются способы их численного решения. В результате проведенного анализа было показано, что изгиб в зоне призабойной сборки при определенных критических значениях характерных параметров обладает сложными формами.

В предыдущих работах авторами исследуется динамика бурильных колонн в рамках линейной теории. Болотин В.В. [34] отмечал, что в области достаточно малых прогибов, действующие на стержень силы можно считать линейными функциями перемещений, скорости и ускорения. Однако влияние нелинейных факторов начинает проявляться все в большей мере с ростом амплитуд. Эти факторы ограничивают бесконечное возрастание амплитуд, предсказываемое линейной теорией. Таким образом, область применения линейных моделей ограничена. Линейная теория не может дать ответ ни на вопрос об установлении колебаний, ни на вопрос о величине установившихся амплитуд. Такие модели отражают достаточно точно реальное поведение конструкций лишь до определенного уровня внешних воздействий и не

допускают всестороннего качественного и количественного анализа буровых колонн. Они существенно сужают представление о реалистичности моделируемых процессов в системе буровая штанга-скважина и адекватность их описания, то есть наличие нелинейных колебаний упругих элементов.

Поэтому сегодня интерес многих современных авторов вызывает моделирование нелинейных динамических систем, что связано с возможностью возникновения даже в простых элементах упругих конструкций нелинейных режимов. В случае стержневых систем, авторы отмечают необходимость учета геометрической и физической нелинейности для более полного исследования реального напряженно-деформированного состояния системы. Так, например, в работе [35] Ерофеевым В.И. и его коллегами было установлено, что для изучения динамики стержневых систем недостаточно классических линейных теорий и необходимо рассматривать теории более высоких приближений, учитывающих, в частности, геометрическую и физическую нелинейности. Они утверждают, что, возникающие при распространении интенсивных изгибных и крутильных волн, нелинейные искажения могут накапливаться с течением времени и привести к сильному укрупнению волновых фронтов и существенному изменению всего волнового процесса при определенных условиях. Последнее может вызвать появление необратимых деформаций в материале, больших напряжений и привести к локальной потере устойчивости.

Модель изгибных колебаний балок с учетом геометрической и физической нелинейностей изучена в работе [36], где в предположении малости углов сдвига модель сводится к одному уравнению относительно поперечного перемещения. Авторами установлено, что нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник и появлению в движущемся профиле волны резких перепадов.

Работы [37-40] и др. также посвящены нелинейной динамике стержневых элементов. Сравнительный анализ линейных и нелинейных изгибных, продольных и крутильных колебаний стержней проведен в [39]. Автор отмечает малую исследованность в области нелинейного динамического анализа механических конструкций. Снимая ограничения на величины деформаций, получена нелинейная модель шарнирно-опертого стержня с учетом кубической нелинейности. Установлено, что стержень совершает меньшие колебания в сравнение с линейными приближениями. Увеличение внешних нагрузок, действующих на систему, приводит к увеличению разницы между амплитудами линейных и нелинейных колебаний. Аналогичные результаты были получены авторами работы [40].

В работе [41] показано, что нелинейные модели более устойчивы, чем линейные модели. Сравнительный анализ нелинейных и линейных моделей установил значительные различия динамических характеристик рассмотренных моделей. Также установлено, что по мере уменьшения модуля Юнга и по мере увеличения ускорения возрастают различия в динамических реакциях между линейной и нелинейной моделями.

Необходимость учета нелинейности также подтверждает анализ, проведенный в работе [42], где было исследовано выпучивание бурильной колонны и обсадных труб, играющие важную механическую роль в бурении и добыче нефти. Были рассмотрены линейные и нелинейные математические модели, найдены критические силы для спирального и синусоидального изгиба в скважинах.

В работе [43] исследована нелинейная динамика касательных продольных колебаний бурильной колонны. При изучении продольного скручивания, как экспериментально, так и численно, особое внимание было уделено продольной неустойчивости. Было продемонстрировано, что в реальной бурильной колонне могут возникать различные типы неустойчивостей, такие как основной резонанс, параметрический резонанс и резонанс по высшим частотам.

Различные по характеру и величине нагрузки, испытываемые бурильной колонной при эксплуатации, могут приводить к сложному деформированному состоянию труб бурильной колонны. В этом случае в бурильной колонне могут возникнуть большие осевые, изгибные и крутильные деформации. При этом чаще всего исследователями делаются ряд предположений и допущений, ограничивающие количество степеней свободы деформирования буровой колонны, и отдельно исследуются составляющие сложного пространственного деформирования. К таким исследованиям относятся, например, работы авторов [18, 21, 36-38, 44-47]. Так в [37] получена система уравнений, описывающая изгибные колебания балки Тимошенко с учетом геометрической и физической нелинейностей, которая в предположении малости углов сдвига сводится к одному уравнению относительно поперечного перемещения. В работах [44, 46] исследуются нелинейные колебания буровых штанг неглубинного бурения с учетом лишь одной из двух компонент поперечных перемещений. В [47] можно найти различные математические модели, описывающие крутильные волны, распространяющиеся в однородных тонких стержнях.

Другие авторы, осознавая важность сочетания различных режимов вибраций, исследуют модели, учитывающие связь между двумя компонентами перемещений пространственного деформирования [48-53]. Так, математические модели, описывающие крутильные и изгибные волны конечной амплитуды в упругих стержнях исследованы в работе [51]. В работе авторы делали допущения о конечности углов закрутки для крутильных колебаний и конечности прогибов и углов поворота поперечных сечений для изгибных колебаний. При линеаризации полученные уравнения совпали с уравнениями крутильных колебаний в технической теории Кулона и с уравнениями изгибных колебаний балки Тимошенко. В [52] исследуются интенсивные связанные изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные волны, распространяющиеся в прямолинейных стержнях. Было установлено, что амплитуды нелинейных изгибных стационарных волн всегда больше, чем амплитуды нелинейных продольно-изгибных стационарных волн (как периодических, так и уединенных). В [53] рассмотрено распространение продольно-изгибных и продольно-крутильных волн в прямолинейном стержне.

Автор работы отмечает несимметричное вхождение в уравнение динамики нелинейных слагаемых, так: продольные волны параметрическим образом воздействуют на изгибные и крутильные волны; крутильные и изгибные волны возбуждают продольные волны, причем изгибные волны являются нелинейным источником продольных волн.

Более комплексный подход, позволяющий спроектировать и внедрить эффективную систему управления колебаниями, связывает все три компоненты сложного пространственного деформирования, что позволяет определять критические скорости и прогнозировать поведение всей системы в целом [54, 55]. В этих работах рассматриваемые модели являются «полными», связывая продольные, поперечные и крутильные колебания буровой колонны. Результаты моделирования подтвердили, что все колебательные компоненты тесно связаны и влияют друг на друга. Полученные модели служат нелинейным обобщением известных математических моделей, не учитывающих нелинейную связь между деформациями и градиентами перемещений (геометрическая нелинейность), деформациями и напряжениями (физическая нелинейность).

Интегрированная математическая модель вибрационных состояний различных компонентов буровой установки, используемой в нефтедобывающей и газовой промышленности, рассматривается в [56]. Работа мотивирована необходимостью понять сложные колебательные процессы, которые может испытывать такая система, чтобы лучше контролировать их конструктивный и деструктивный потенциал. Модель выражается через шесть непрерывных независимых степеней свободы. Три из них определяют положение центра тяжести бурильной колонны в пространстве, а оставшиеся три динамическое состояние бурильной колонны, выраженное в терминах изгиб, кручение и деформация сдвига, вместе с расширением и эластичностью. Дополняя модель соответствующими конструктивными уравнениями, которые связывают деформации изгиба и скручивания вместе со сдвигом и силами сжатия, можно полностью приспособить модель вибрации, как в прямой, так и в искривленной буровой скважине. Они включают в себя осевое движение вдоль длины бурильной колонны, крутильные или вращательные движения и поперечные или боковые движения. Обращается внимание на граничные условия, зависящие от типа бурильной колонны и стабилизатора конструкции низа бурильной колонны, в том числе учитывается тип долота и взаимодействия между отверстием полости и бурильной колонной. Модель используется для изучения устойчивости осесимметричной конфигурации бурильной колонны в вертикальных буровых скважинах под действием кручения, осевых и боковых возмущений.

Среди более свежих работ по динамике бурового оборудования можно отметить работы [17, 25, 41, 54, 57-63, 65-71]. Они направлены на повышение реалистичности изучаемой динамики бурильных колонн в условиях действия окружающей среды и осложняющих факторов, учета нелинейных эффектов,

комбинации технических характеристик, 2- или 3D связанных между собой составляющих движений колонны.

В работах Jafari A.A., Liang F. и др. [25, 60] исследуются колебания и устойчивость вращающихся буровых колонн в зависимости от веса колонны, скорости ее вращения, нагрузки на долото и потока промывочной жидкости. Pei Y.-C. и соавторы рассматривают динамику вращающейся колонны с буровым раствором под действием крутящего момента и осевой нагрузки [61]. Авторы [62, 63] Lian Zh, Zhang Q., Meng Y., Li H. и др. изучают динамику бурильной колонны в потоке газа или сжатого воздуха. Работа [57] совмещает в себе исследования нелинейных колебаний вращающейся буровой колонны в сверхзвуковом потоке газа и жидкости, модель которых построена на основе теории конечных деформаций V.V. Novozhilov [64].

Среди широко известных работ Christoforou A.P., Yigit A.S., Khulief Y., Al-Sulaiman F.A., Nandakumar K., Wiercigroch M., Ritto T.G. и др. в области бурения отметим их работы по контактному взаимодействию буровой колонны со стенками скважины, пластом грунта [54, 65-67]. В работе [67] рассмотрена случайность контактного взаимодействия, вызывающая стохастичность в процессе бурения скважин. Модель плоских изгибных колебаний с учетом случайно начальной кривизны рассмотрена в [68].

Работы [17, 41, 69-71] посвящены моделированию динамики буровых колонн с учетом нелинейных факторов. Исследуется устойчивость динамического состояния буровой колонны [69, 70]. Проведен анализ ее перемещений в нелинейной постановке.

Одной из причин, приводящих к потере несущей способности буровых штанг или нарушению режима бурения, является расхождение между расчетными данными о прочности и устойчивости и фактическим состоянием конструкции. В других работах авторы исследуют колебательные процессы, происходящие при разработке буровой скважины с учетом случайной природы различных осложняющих факторов. Еще в 1850-ых Bogdanoff J.L. и Goldberg J.E. [72] осознали существование ограничений детерминистской теории и необходимость использования методов случайных колебаний и/или стохастической динамики. Однако исследовательских работ в этом направлении с тех пор проводилось очень мало, вероятно, из-за концептуальной сложности случайных вибраций. Среди очень немногих исследователей, работающих над случайными колебаниями бурильной колонны можно выделить работы Ritto T., Soize C. и Sampaio R. В работах [73-76] ими исследовались стохастические модели динамика бурильных колонн. Основное внимание авторов было уделено взаимодействию долота с породой и влиянию бурового раствора на динамику буровых штанг. В работах [67, 79] уделено внимание взаимодействию буровой колонны со стенкой буровой скважины. В других работах [77, 78] также изучались неопределенности, но связанные с собственным весом буровых штанг.

Проведенный анализ работ по динамике бурового оборудования показывает недостаточную исследованность проблем, касающихся нелинейных

колебаний бурильных колонн с учетом влияния осложняющих факторов и неопределенностей, в частности, контакт буровой колонны со стенкой скважины, случайные дефекты и т.д., что обуславливает актуальность проводимого исследования в данной диссертационной работе и необходимость дальнейшего более детального изучения динамики бурильных колонн, применяемых для проходки нефтяных и газовых скважин, под воздействием факторов окружающей среды и внешних нагрузок.

В связи с этим формируется **цель** диссертационной работы, заключающаяся в моделировании нелинейной и стохастической динамики буровых штанг неглубинного бурения в нефтегазодобывающей отрасли с учетом осложняющих факторов и окружающей среды, их анализе.

Объект исследования – бурильные колонны, применяемые в нефтегазодобывающей промышленности для бурения неглубинных скважин, находящаяся под влиянием внешних сил и окружающей среды.

Предмет исследования – нелинейные и стохастические колебания преднапряжённых буровых штанг с учетом осложняющих факторов при конечных деформациях.

Из поставленной цели вытекают следующие **задачи исследования**:

– Разработка модели движения сжато-скрученной буровой штанги при малых деформациях и ее многопараметрический асимптотический анализ, как первое приближение.

– Разработка нелинейной модели движения сжато-скрученной буровой штанги при конечных деформациях для изгибно-крутильных колебаний различной топологии, ее численный анализ.

– Разработка нелинейных моделей движения буровой штанги, осложненных ее начальной кривизной и действием факторов окружающей среды (сил трения штанги о стенки скважины, с учетом особенностей низа буровой колонны) и их численный анализ.

– Исследование стохастических колебаний буровых штанг при действии осложняющих факторов случайного характера (случайной начальной кривизны буровой штанги, случайной силы трения штанги о стенки скважины).

2 РАЗРАБОТКА МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ СЖАТО-СКРУЧЕННЫХ БУРОВЫХ ШТАНГ РАЗЛИЧНОЙ ТОПОЛОГИИ И РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ИХ АНАЛИЗА

Данный раздел диссертационной работы посвящен разработке нелинейных моделей движения буровых штанг неглубинного бурения. В результате воздействия на штангу многообразных факторов, осложняющих ее движение, в буровой штанге возникают сложные динамические процессы, моделирование и анализ которых вызывает трудности. Поэтому из соображений целесообразности обычно исследуются изгибные, продольные, крутильные колебания и их комбинации, как наиболее характерные составляющие сложного [16, 28, 80]. Прежде, чем приступить к моделированию и численному анализу изгибно-крутильных колебаний буровой штанги без ограничений на величины деформаций, рассмотрены классические линейные случаи плоских и пространственных изгибных колебаний буровой штанги. Для более лучшего понимания особенностей динамического процесса, изучена многопараметрической природа системы, обусловленная соотношением между крутящим моментом и продольной силой, частотой и длиной волны, а также наличием вращения, что позволило установить общую классификацию изгибных колебаний сжато-скрученной вращающейся буровой штанги. Для случая плоских изгибных колебаний было рассмотрено применение аппарата теории обобщенных функций и показано, что в потенциале этот аппарат может быть очень полезен при исследовании воздействия на буровую колонну сосредоточенных силовых источников и решении обратных и полу-обратных задач.

2.1 Разработка модели движения сжато-скрученной буровой штанги при малых деформациях

Рассмотрим сжато-скрученный вращающийся стержень преднапряжённый постоянной продольной нагрузкой T и постоянным крутящим моментом M_z (рисунок 1).

Для вывода основных уравнений используется вариационный метод Остроградского-Гамильтона [57]. Для действия Q имеем:

$$\delta Q = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U_k - U_p + W) dt = 0, \quad (2.1)$$

где кинетическая энергия U_k , потенциальная энергия U_p и потенциал внешних усилий W определяются следующим образом:

$$U_k = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left(\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 + |\mathbf{u}|^2 \omega^2 \right) dz, \quad (2.2)$$

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^L \left(EJ \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right|^2 \right) dz, \quad (2.3)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left(T \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right|^2 + M_z \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \mathbf{j}_3 \right) dz. \quad (2.4)$$

Здесь A – площадь поперечного сечения; EJ – изгибная жесткость; ω – угловая скорость; $\mathbf{u}(z, t) = u_i \mathbf{j}_i$ – вектор перемещений, где его первые две компоненты u_1 и u_2 – поперечные перемещения в плоскостях XOZ и YOZ , соответственно, а третью компоненту для продольных перемещений считаем равной нулю, т.е. $u_3 = 0$; L – длина буровой штанги (см. рисунок 1).

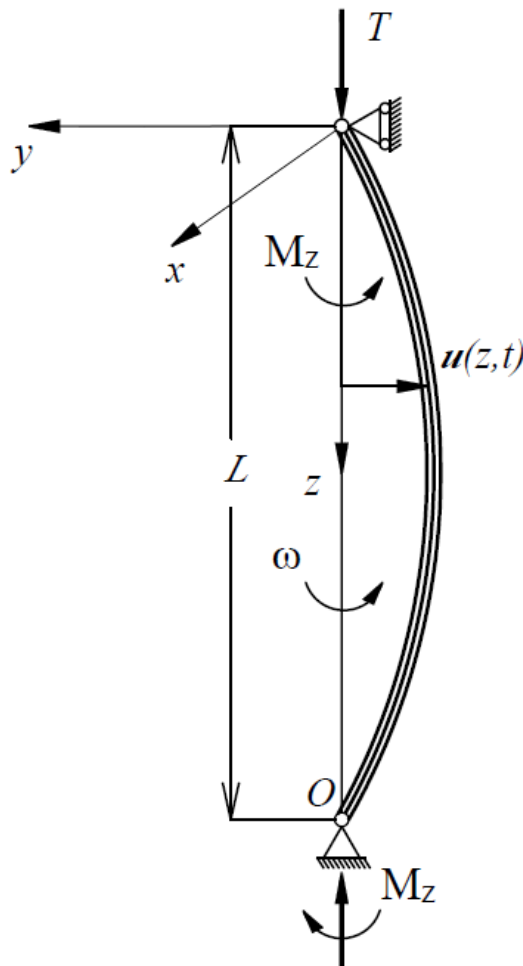


Рисунок 1 – Расчетная схема буровой колонны

Вычисляя вариацию для формул (2.2)-(2.4) получим следующие выражения, соответственно:

$$\delta U_k = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(-\rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho A \omega^2 \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{u} dz dt, \quad (2.5)$$

$$\delta U_p = EJ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \Big|_0^L dt - EJ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} \cdot \delta \mathbf{u} \Big|_0^L dt + EJ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial z^4} \cdot \delta \mathbf{u} dz dt, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{M_z}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \times \mathbf{j}_3 \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - M_z \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \times \mathbf{j}_3 \right) \cdot \delta \mathbf{u} \Big|_0^L dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(T \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} - M_z \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} \times \mathbf{j}_3 \right) \cdot \delta \mathbf{u} dz dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом уравнения изгиба для прямолинейной балки представляется в следующем виде:

$$EJ \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial z^4} + T \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} - M_z \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} \times \mathbf{j}_3 - \rho A \omega^2 \mathbf{u} + \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.8)$$

при естественных граничных условиях при $z=0$ и $z=L$:

$$\begin{aligned} & \left(EJ \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} + T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - M_z \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \times \mathbf{j}_3 \right) \cdot \delta \mathbf{u} = 0 \\ & \left(EJ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} - \frac{M_z}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \times \mathbf{j}_3 \right) \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2 Многопараметрический анализ линейной модели сжато-скрученной буровой штанги

Рассматриваемая задача возникает при исследовании динамики и прочности бурильных колонн, которые широко используются в нефтяной и газовой промышленности [83-85], кроме того, представляет интерес для моделирования процесса сверления на других масштабах [86-88]. Простейшей математической моделью бурильной колонны может служить вращающаяся сжато-скрученная балка [89]. Примеры учета постоянной продольной сжимающей нагрузки и постоянного крутящего момента приведены для статических задач в [90, 91]. В этой постановке были изучены различные практически и теоретически важные аспекты, в частности, численно исследовалось дисперсионное уравнение, соответствующее указанной модели [28].

В то же самое время многопараметрическая природа изучаемой системы, обусловленная соотношением между крутящим моментом и продольной силой,

а также частотой и длиной волны, и наличием вращения во внимание не принималась.

В публикуемой работе богатый опыт асимптотического анализа свободных колебания оболочек [92-97] распространяется на сформулированную задачу о балке. В качестве основного малого параметра берется соотношение пропорциональное отношению изгибной жесткости к величине продольной нагрузки, нормированную на длину конструкции. Помимо этого, используются традиционные в теории оболочек показатели изменчивости и динамичности, а также вводится дополнительный параметр, характеризующий интенсивность предварительного нагружения.

2.2.1 Многопараметрический асимптотический анализ

Далее рассмотрим гармонические колебания, поэтому вторая производная по времени всюду будет заменяться на $(-\lambda^2)$, где λ – круговая частота, а временной множитель $\exp(i\lambda t)$ всюду будет опускаться.

$$\eta^2 \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi^2} - M_\xi \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \xi^3} \times \mathbf{j}_3 - \Psi^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.10)$$

Здесь $\xi = L^{-1}z$, $M_\xi = \frac{M_z}{TL}$, $c = \sqrt{\frac{T}{\rho A}}$, $\Omega = c^{-1}\omega L$, $\Lambda = c^{-1}\lambda L$, $\Psi = \sqrt{\Omega^2 + \Lambda^2}$, а основной малый параметр η определяется как:

$$\eta = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{EJ}{T}} \quad (2.11)$$

Растягивая продольную координату и масштабируя исходные функции получим:

$$\begin{aligned} \xi &= \eta^{-q} \gamma, \quad \frac{\partial}{\partial \gamma} \sim 1, \quad q \geq 0, \\ M_\xi &= M_* \eta^\alpha, \quad M_* \sim 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \Psi = \eta^{-a} \Psi_*, \quad \Psi_* \sim 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В этих формулах q и a обозначают так называемые индексы изменчивости и динамичности, которые аналогичны своим аналогам в теории оболочек [97]. Из (2.10) получим уравнение в безразмерных координатах:

$$\eta^{2-2q} \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial \gamma^4} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \gamma^2} - M_* \eta^{\alpha-q} \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \gamma^3} \times \mathbf{j}_3 - \Psi_*^2 \eta^{2q-2a} \mathbf{u} = 0. \quad (2.13)$$

Сосредоточимся сначала на случае $a \geq 0$. Уравнение (2.13) в зависимости от параметров α, q и a допускает 6 предельных форм, соответствующие пренебрежению некоторыми асимптотически малыми членами. При этом инерционный член будем пока всегда удерживать.

Приближения в главном для уравнения (2.13), соответствующие предельным случаям, указанным в таблице 1 и на рисунке 2, имеют вид:

$$(A) \quad \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial \gamma^4} - \Psi_*^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.14)$$

$$(B) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \gamma^2} - \Psi_*^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.15)$$

$$(C) \quad M_* \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \gamma^3} \times \mathbf{j}_3 + \Psi_*^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2.16)$$

$$(D) \quad \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial \gamma^4} - M_* \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \gamma^3} \times \mathbf{j}_3 - \Psi_*^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.17)$$

$$(E) \quad \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial \gamma^4} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \gamma^2} - \Psi_*^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.18)$$

$$(F) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \gamma^2} - M_* \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \gamma^3} \times \mathbf{j}_3 - \Psi_*^2 \mathbf{u} = 0. \quad (2.19)$$

Таблица 1. Предельные случаи

Случай	$q = q(a, \alpha)$	Диапазон параметров
A	$q = \frac{a+1}{2}$	$a > 1, a > 3 - 2\alpha$
B	$q = a$	$a < 1, a < \alpha$
C	$q = \frac{2a + \alpha}{3}$	$\alpha < a < 3 - 2\alpha$
D	$q = \frac{a+1}{2}$	$a = 3 - 2\alpha, a > 1, \alpha < 1$
E	$q = 1$	$a = 1, \alpha < 1$
F	$q = a$	$a = \alpha, \alpha < 1$

Для предельного случая (A) пренебрегаем влиянием продольной сжимающей нагрузки и скручивающей момента. Тем не менее точности полученного приближения недостаточно для проведения анализа

дисперсионных кривых. В следующем приближении мы получаем из исходного уравнения (2.13):

$$\frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial \gamma^4} - \left(\Psi_*^2 + \Psi_* \eta^{a-1} - M_* \Psi_* \eta^{\alpha - \frac{3-a}{2}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \times \mathbf{j}_3 \right) \mathbf{u} = 0. \quad (2.20)$$

Для случая (В) учитывается влияние только продольной сжимающей нагрузки; при этом приведенное уравнение (2.15) не описывает колебательный режим. Полученное приближенное дифференциальное уравнение для случая (С), учитывающее влияние только скручивающего момента, имеет 3-ий порядок, таким образом мы получаем несоответствие с числом граничных условий. Замыкание граничных условий для этого случая будет рассмотрено в отдельной главе. Для оставшихся случаев пренебрегаем влиянием следующих членов: в случае (D) – влиянием продольной сжимающей нагрузки; в случае (E) – влиянием скручивающего момента; в случае (F) – влиянием изгибной жесткости.

Вполне логично, что в полученных уравнениях (2.17), (2.18) и (2.19) пренебрегается только одно из первых трех членов, т.к. в окрестностях этих границ происходит переход из одного асимптотического режима в другой. Очевидно, что в точке (1, 1, 1) надо будет исходить из полного уравнения.

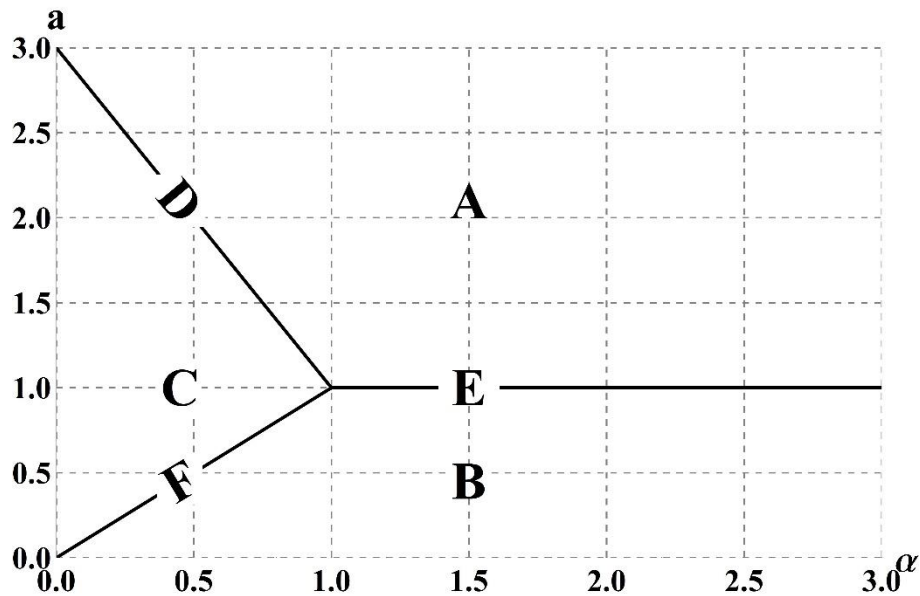


Рисунок 2 – Предельные случаи

2.2.2 Метод многих масштабов и низкочастотные колебания

Теперь рассмотрим низкочастотный режим, когда в (2.13) $a < 0$. В этом случае инерционный член в (2.13) в главном можно отбросить, получая квазистатическое приближение:

$$\eta^{2-2q} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \gamma^2} + \mathbf{u} - M_* \eta^{\alpha-q} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \gamma} \times \mathbf{j}_3 = 0. \quad (2.21)$$

Подставляя в (2.21) $\mathbf{u} = \mathbf{A} \exp(-ik_* \gamma)$, получим следующее квадратное характеристическое уравнение для ненулевых корней:

$$(\eta^{2-2q} k_*^2 - 1) \mathbf{A} - i M_* \eta^{\alpha-q} k_* \mathbf{A} \times \mathbf{j}_3 = 0. \quad (2.22)$$

Корни уравнения (2.22):

$$k_*^{st} = k_*^n = \pm \eta^q \frac{\eta^\alpha M_* \pm \sqrt{4\eta^2 + \eta^{2\alpha} M_*^2}}{2\eta^2}, \quad n=1-4 \quad (2.23)$$

Отметим, что наличие ненулевых корней связано с преднапряжением стержня продольной сжимающей нагрузкой и крутящим моментом. Возвращаясь к нерастянутым координатам, т.е. $k = \eta^{-q} k_*$, тогда можно заметить, очевидно, что корни зависят только от параметра α . При значениях параметра $\alpha < 1$ два положительных корня будут разных порядков и в пределе при $\alpha \rightarrow 0$: $k_1 \approx M_*^{-1}$ and $k_2 \approx M_* \eta^{-2}$. При $\alpha \geq 1$ оба корня стремятся к значению η^{-1} .

Далее вернемся к уравнению, полагая что частота Ψ в (2.13) мала, т.е. $a < 0$. Для простоты положим $q = \alpha = 1$, т.е. рассмотрим наиболее общий случай, когда в уравнении сохраняются все члены.

$$\frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial \gamma^4} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \gamma^2} - M_* \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \gamma^3} \times \mathbf{j}_3 - \varepsilon \Psi_*^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.24)$$

где $\Psi_* = \varepsilon^{-1/2} \Psi \eta$.

Для решения уравнения (2.24) применим метод многих масштабов [98, 99], полагая:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\gamma_0, \gamma_1) + \varepsilon \mathbf{u}_1(\gamma_0, \gamma_1) + \dots, \quad (2.25)$$

где $\gamma_0 = \gamma$ and $\gamma_1 = \varepsilon \gamma$.

При этом дифференциальные операторы примут вид:

$$\frac{\partial^m}{\partial \gamma^m} = \frac{\partial^m}{\partial \gamma_0^m} + \varepsilon \frac{\partial^m}{\partial \gamma_0^{m-1} \partial \gamma_1} + \dots, \quad m=1-4. \quad (2.26)$$

Тогда (2.24) после подстановки (2.25) и (2.26) придем к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^4 \mathbf{u}_0}{\partial \gamma_0^4} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial \gamma_0^2} - M_* \frac{\partial^3 \mathbf{u}_0}{\partial \gamma_0^3} \times \mathbf{j}_3 = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^4 \mathbf{u}_1}{\partial \gamma_0^4} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial \gamma_0^2} - M_* \frac{\partial^3 \mathbf{u}_1}{\partial \gamma_0^3} \times \mathbf{j}_3 = \Psi_*^2 \mathbf{u}_0 - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial \gamma_0 \partial \gamma_1} - 4 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial \gamma_0^3 \partial \gamma_1} + 3M_* \frac{\partial^3 \mathbf{u}_0}{\partial \gamma_0^2 \partial \gamma_1} \times \mathbf{j}_3. \quad (2.28)$$

Корни (2.27) были ранее найдены в (2.23), таким образом \mathbf{u}_0 можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{u}_0^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)}(\gamma_1) \cos(k_*^{st} \gamma_0) + (-1)^n \mathbf{A}^{(n)}(\gamma_1) \times \mathbf{j}_3 \sin(k_*^{st} \gamma_0), \quad n = 1-4 \quad (2.29)$$

Тогда требование отсутствия вековых членов в (2.28) приводит к системе ОДУ в терминах $\mathbf{A}^{(n)}$:

$$\Psi_*^2 \mathbf{A}^{(n)}(\gamma_1) + (-1)^n \left(2k_*^{st} - 4(k_*^{st})^3 + (-1)^n 3M_* (k_*^{st})^2 \right) \mathbf{A}^{(n)'}(\gamma_1) \times \mathbf{j}_3 = 0. \quad (2.30)$$

которое с учетом (2.22) может быть переписано в виде:

$$\Psi_*^2 \mathbf{A}^{(n)}(\gamma_1) + (-1)^n \left(k_*^{st} + (k_*^{st})^3 \right) \mathbf{A}^{(n)'}(\gamma_1) \times \mathbf{j}_3 = 0. \quad (2.31)$$

Затем, вводя обозначение:

$$p_* = \frac{\Psi_*^2}{k_*^{st} \left(1 + (k_*^{st})^2 \right)} = \frac{\Psi_*^2 \eta^2}{\varepsilon k_*^{st} \left(1 + (k_*^{st})^2 \right)}, \quad (2.32)$$

получим двухчленное асимптотическое разложение для решения уравнения (2.24) в виде:

$$k_* = k_*^{st} + \varepsilon p_{*n} = k_*^{st} + \frac{\Psi_*^2 \eta^2}{k_*^{st} \left(1 + (k_*^{st})^2 \right)}, \quad (2.33)$$

где k_*^{st} определяются из (2.23).

Или в исходных координатах $k = \eta k_*$:

$$k = k^{st} + \frac{\Psi^2}{k^{st} \left(1 + \eta^2 (k^{st})^2 \right)}. \quad (2.34)$$

В заключении можно отметить, что тоже самое выражение (2.34) может быть получено и при других значениях параметров q , a и α .

2.2.3 Дисперсионные кривые и их численный анализ

Рассмотрим перемещения балки в плоскостях XOZ и YOZ в виде бегущей волны $\mathbf{u}(\xi, t) = \mathbf{A} \exp[i(\lambda t - k\xi)]$. Тогда уравнение (2.8) в обозначениях для (2.10) примет вид:

$$(\eta^2 k^4 - k^2 - \Psi^2) \mathbf{A} - i M_\xi k^3 \mathbf{A} \times \mathbf{j}_3 = 0, \quad (2.35)$$

В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\det \begin{pmatrix} \eta^2 k^4 - k^2 - \Psi^2 & -i M_\xi k^3 \\ i M_\xi k^3 & \eta^2 k^4 - k^2 - \Psi^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.36)$$

или

$$(\eta^2 k^4 - k^2 - \Psi^2)^2 - M_\xi^2 k^6 = 0. \quad (2.37)$$

Для уравнения (2.37) можно провести подобный анализ как для уравнения (2.13), чтобы получить для каждой из областей на рисунке 2 приближенные дисперсионные уравнения, идентичные дисперсионным уравнениям для приближенных уравнений (2.14)-(2.20). Таким образом, мы получим из последних:

$$(A) \quad \eta^2 k^4 - \Psi^2 = 0, \quad (2.38)$$

$$(B) \quad k^2 + \Psi^2 = 0, \quad (2.39)$$

$$(C) \quad \Psi^4 - M_\xi^2 k^6 = 0 \quad (2.40)$$

$$(D) \quad (\eta^2 k^4 - \Psi^2)^2 - M_\xi^2 k^6 = 0. \quad (2.41)$$

$$(E) \quad \eta^2 k^4 - k^2 - \Psi^2 = 0. \quad (2.42)$$

$$(F) \quad (k^2 + \Psi^2)^2 - M_\xi^2 k^6 = 0. \quad (2.43)$$

Для случая (B), как ранее было отмечено, не будут наблюдаться распространения волн. Более подробный численный анализ дисперсионных кривых в следующей секции.

Дисперсионное уравнение, соответствующее уточненному уравнению (2.20), будет иметь вид:

$$(k^4 - \eta^{-1}\Psi - \Psi^2)^2 - M_{\xi}^2 \eta^{-2} k^2 \Psi^2 = 0. \quad (2.44)$$

Для низкочастотного случая $a < 0$ дисперсионные кривые описываются уравнением (2.32).

Далее на рисунках будут приведены графики кривых полного и приближенных дисперсионных уравнений $k(\Psi)$ при $\eta = 10^{-2}$ для значений $\alpha = 1.5$ и $\alpha = 0.5$. Из рисунка 2 видно, что при значении $\alpha = 1.5$ с ростом величины частоты дисперсионная кривая будет переходить с зоны (В) в зону (А), а при значении $\alpha = 0.5$ – с зоны (В) в (С) и далее в (А). Таким образом надо посмотреть как будут вести себя в этих зонах дисперсионные кривые приближенных уравнений в сравнении с полным дисперсионным уравнением.

На рисунке 3 построены кривые полного дисперсионного уравнения и решение низкочастотной задачи при $\alpha = 1.5$. Видно, что при малых значениях частоты, решение низкочастотного уравнения (2.33) хорошо приближает полное дисперсионное уравнение. При этом, стоит отметить, что значения волнового числа при $\Psi = 0$ не равны нулю в силу преднапряженности буровой колонны скручивающим моментом и сжимающей нагрузкой.

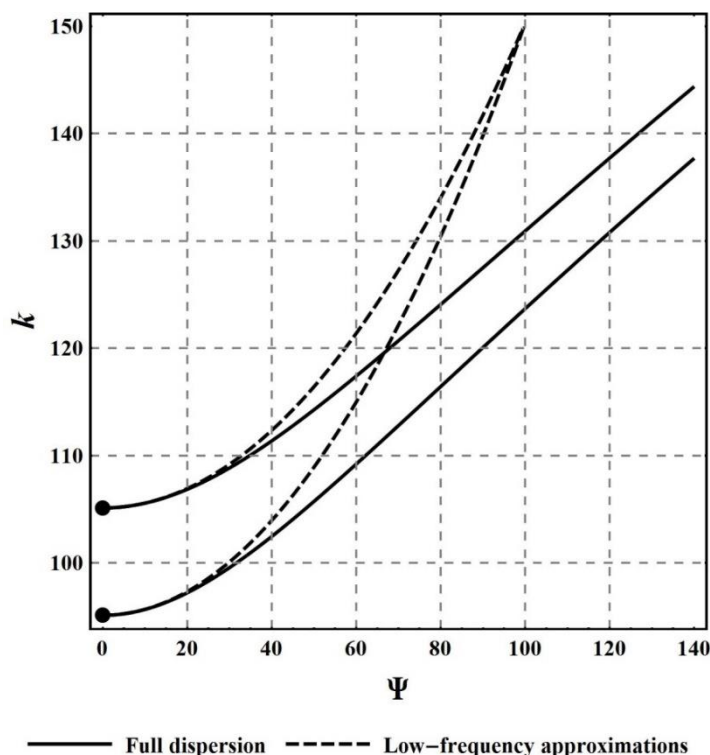


Рисунок 3 – Полное дисперсионное уравнение и решение низкочастотных уравнений при $\alpha = 1.5$

На рисунке 4 построены кривые полного дисперсионного уравнения и приближенного уравнения (2.18) в окрестностях границы (Е) при $\alpha = 1.5$. Дисперсионная кривая уравнения (2.18) приближает полное дисперсионное уравнение, но при этом два решения “схлопываются” в одно. Похожая вещь наблюдается и в случае (А) для уравнения (2.14), что видно на рисунке 5. Чтобы получить два решения достаточно возмутить полное дисперсионное решение приближенным, как пример было получено возмущенное уравнение (2.20) для случая (А), где (2.13) уравнение было возмущено (2.14). На рисунке 6 изображены возмущенное приближенное и полное дисперсионные уравнения. Как видно из рисунка получены два решения, которые достаточно хорошо приближают полное уравнение.

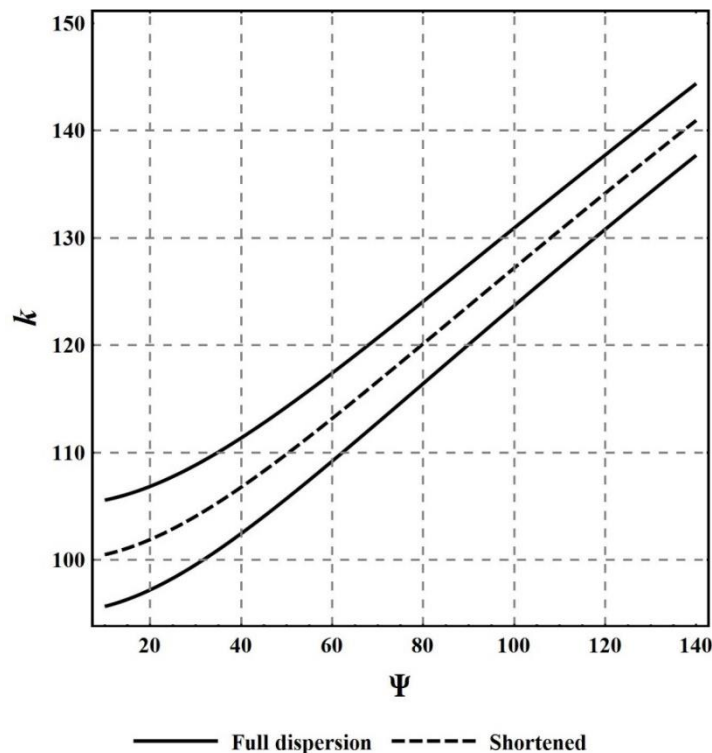


Рисунок 4 – Полное дисперсионное уравнение и приближенное уравнение в окрестности границы Е при $\alpha = 1.5$

На рисунках 7-12 показаны полное и приближенные дисперсионные уравнения при значении параметра $\alpha = 0.5$. На рисунках 7-8 построены кривые полного дисперсионного уравнения и решение низкочастотных уравнений при $\alpha = 0.5$. Как было сказано ранее, корни решения квазистатической задачи зависят от параметра α и при значении $\alpha < 1$ они на порядок отличаются друг от друга. На рисунке 9 построены кривые полного дисперсионного уравнения и приближенного уравнения (2.19) в окрестностях границы (F) при $\alpha = 0.5$, где естественно наблюдается только один корень. На рисунке 10 построены кривые случая (С) для полного и приближенного уравнения (2.16). В окрестностях границы (D) появляется второй корень, поэтому на рисунке 11 для полного и приближенного уравнения (2.17) мы наблюдаем два корня. На рисунке 12 сразу

был представлено возмущенное приближенное уравнение (2.20) для случая (А) при $\alpha = 0.5$.

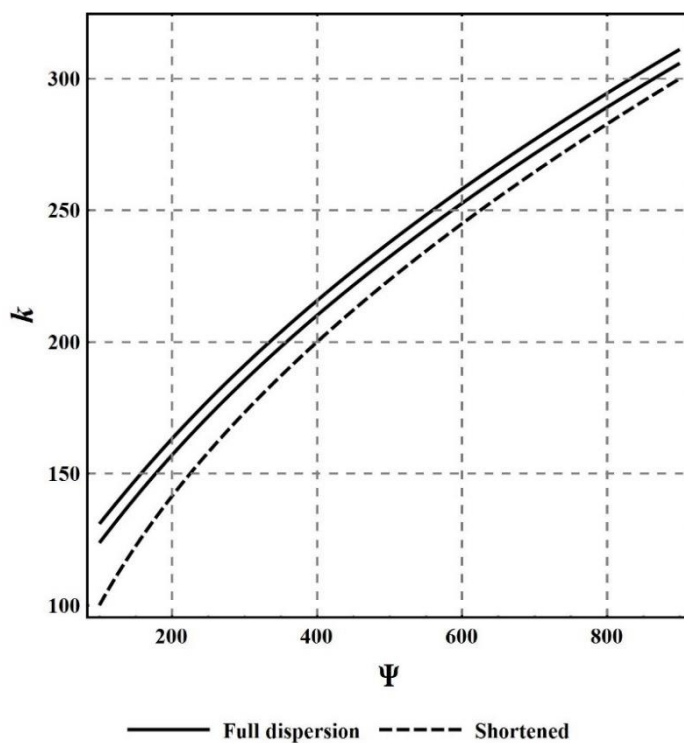


Рисунок 5 – Полное дисперсионное уравнение и приближенное уравнение для случая (А) при $\alpha = 1.5$

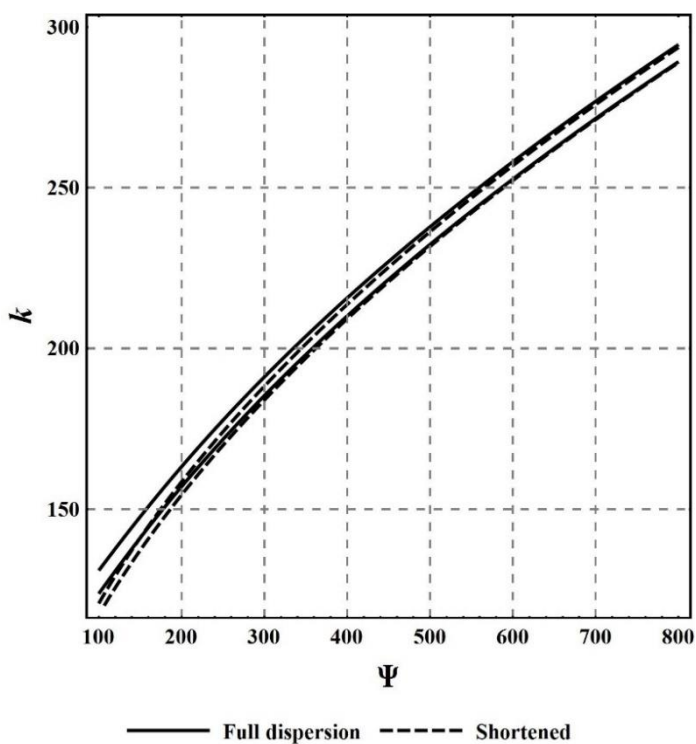


Рисунок 6 – Полное дисперсионное уравнение и возмущенное приближенное уравнение для случая (А) при $\alpha = 1.5$

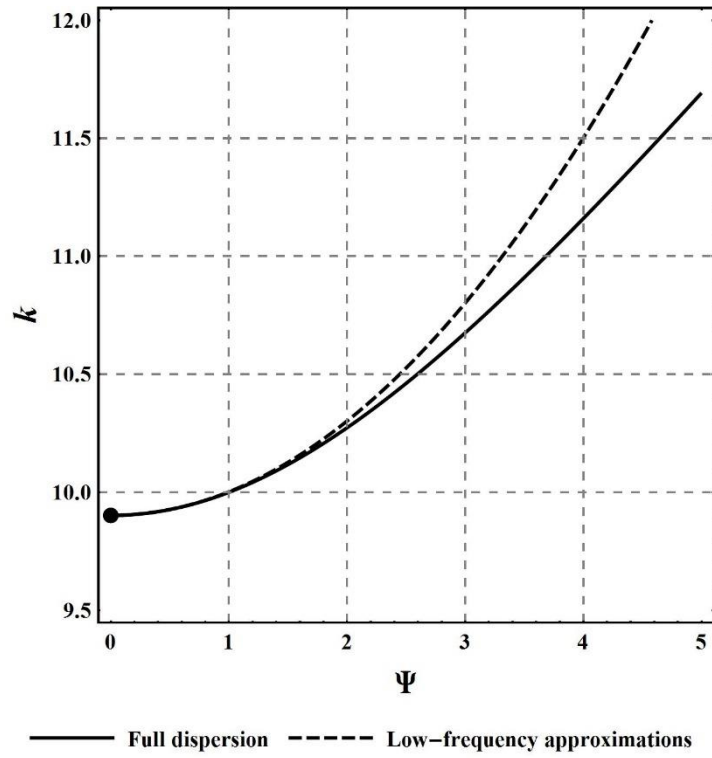


Рисунок 7 – Полное дисперсионное уравнение и первый корень решения низкочастотных уравнений при $\alpha = 1.5$

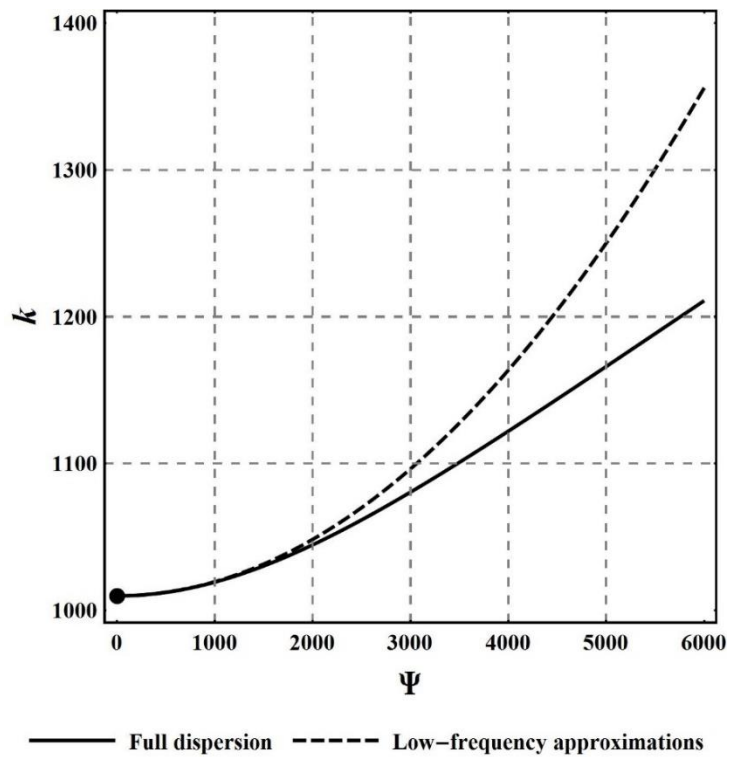


Рисунок 8 – Полное дисперсионное уравнение и второй корень решения низкочастотных уравнений при $\alpha = 0.5$

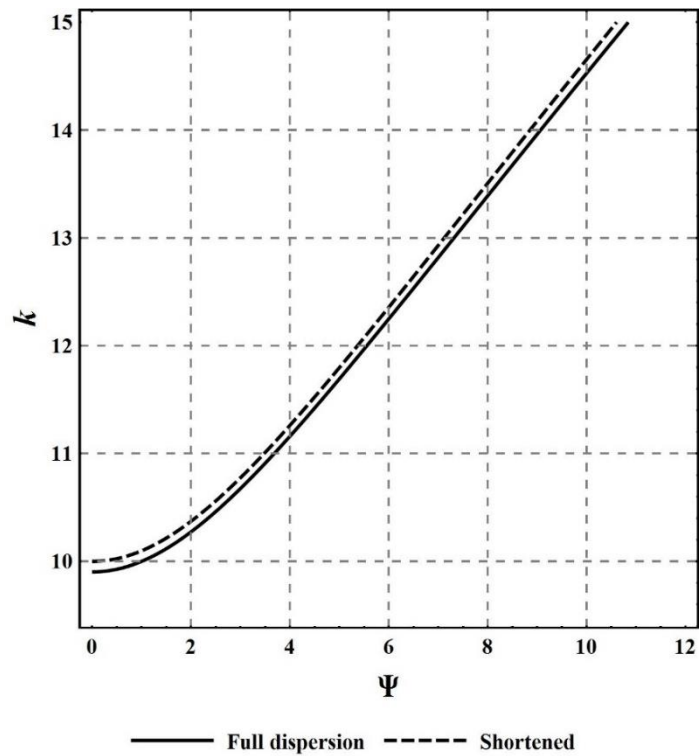


Рисунок 9 – Полное дисперсионное уравнение и приближенное уравнение в окрестностях границы (F) при $\alpha = 0.5$

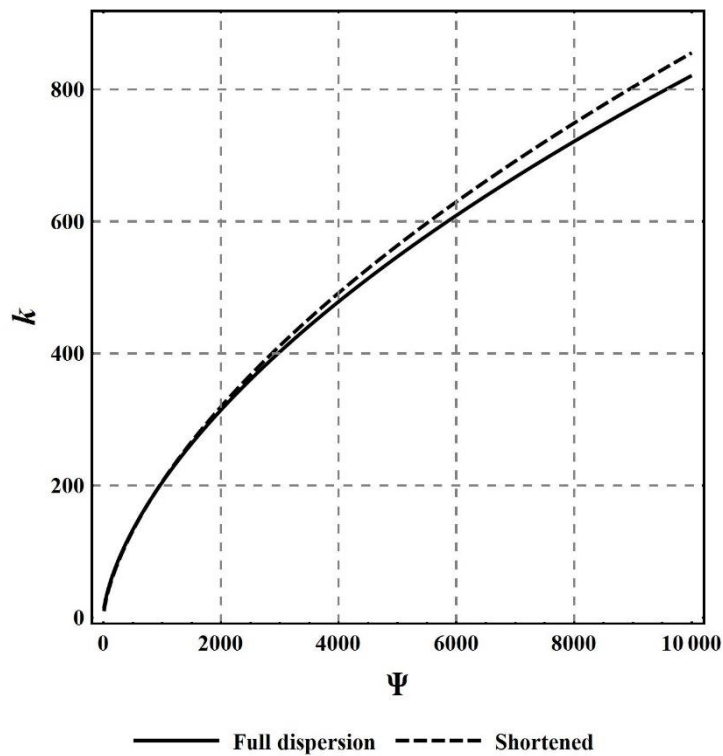


Рисунок 10 – Полное дисперсионное уравнение и приближенное уравнение для случая (C) при $\alpha = 0.5$

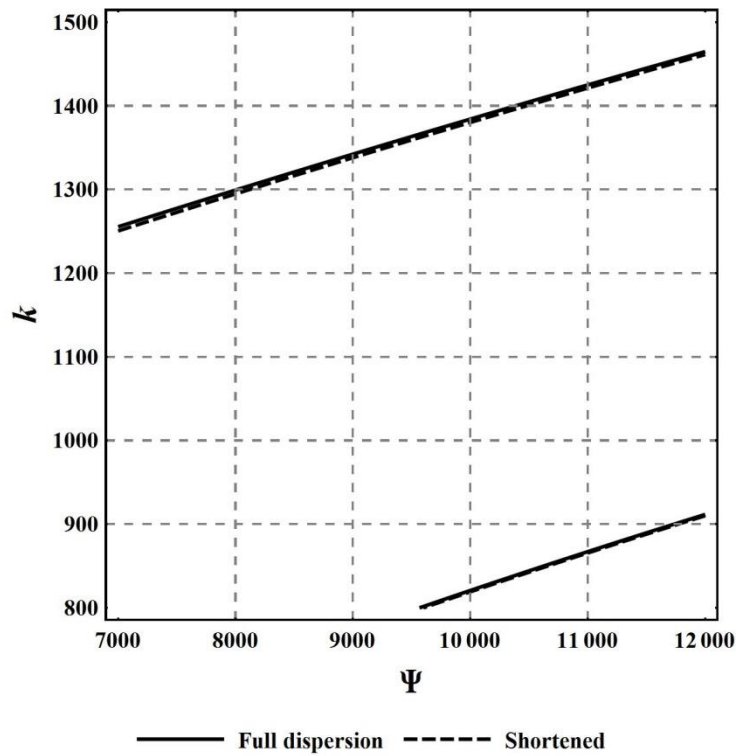


Рисунок 11 – Полное дисперсионное уравнение и приближенное уравнение в окрестностях границы (D) при $\alpha = 0.5$

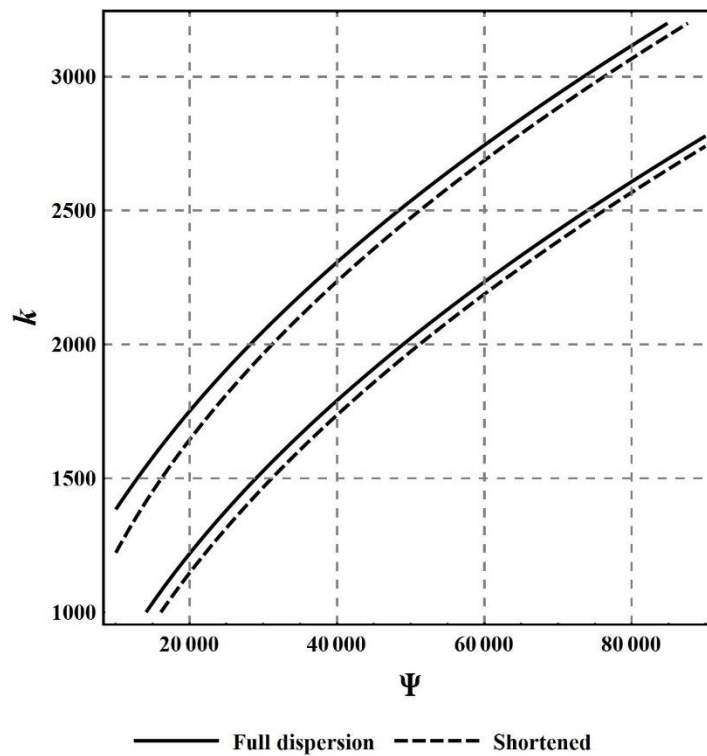


Рисунок 12 – Полное дисперсионное уравнение и возмущенное приближенное уравнение для случая (A) при $\alpha = 0.5$

2.2.4 Пример краевой задачи

Рассмотрим задачу с граничными условиями, моделирующими заделанный край:

$$\mathbf{u}|_{\xi=0,1} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi}|_{\xi=0,1} = 0, \quad (2.45)$$

Они согласуются с естественными граничными условиями (2.9). При этом наиболее интересным случаем является векторное уравнение 3-го порядка (2.16), полученное для случая (С). Обозначим для него $q = q_1$ имея $q_1 = \frac{2a + \alpha}{3}$, $\alpha < a < 3 - 2\alpha$.

Очевидно, что в (2.16) недостаточно произволов, чтобы удовлетворить всем 4 граничным условиям (2.45). Поэтому привлечем еще одно векторное уравнение при тех же, как и выше, параметрах a и α . Пусть для него $q = q_2$, а также примем:

$$q_2 = 2 - \alpha, \quad q_2 > \max\left(1, \frac{a+1}{2}\right). \quad (2.46)$$

Учитывая эти условия, получим в главном из (2.13):

$$\eta^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} - M_\xi \mathbf{u} \times \mathbf{j}_3 = 0, \quad (2.47)$$

где $M_\xi = M_* \eta^\alpha$. Здесь, как и ранее для уравнения (2.21), мы сразу понизили порядок уравнения.

Будем искать решение сформулированной задачи в виде суперпозиции

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (2.48)$$

где \mathbf{u}_1 – решение динамического уравнения (2.16), \mathbf{u}_2 – решение квазистатического уравнения (2.47).

Тогда для граничных условий (2.45) получим:

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)|_{\xi=0,1} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right)|_{\xi=0,1} = 0. \quad (2.49)$$

Перейдем во втором выражении уравнения (2.49) к растянутой координате γ , имея:

$$\eta^{q_2 - q_1} \left. \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0, \eta^{-q_1}} + \left. \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0, \eta^{-q_2}} = 0. \quad (2.50)$$

Из (2.50) видно, что \mathbf{u}_1 на порядок больше, чем \mathbf{u}_2 , в силу того что $q_1 < q_2$. Таким образом (2.49) можно переписать в виде:

$$\mathbf{u}_1|_{\xi=0,1} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0,1} = 0. \quad (2.51)$$

Решение квазистатического уравнения (2.47) имеет вид:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{C} \cos(M_\xi \eta^{-2} \xi) + \mathbf{C} \times \mathbf{j}_3 \sin(M_\xi \eta^{-2} \xi). \quad (2.52)$$

При этом производная от решения (2.51) выражается как:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} = M_\xi \eta^{-2} \left(\mathbf{C} \times \mathbf{j}_3 \cos(M_\xi \eta^{-2} \xi) - \mathbf{C} \sin(M_\xi \eta^{-2} \xi) \right). \quad (2.53)$$

где \mathbf{C} – вектор произвольных постоянных.

Подставляя теперь (2.53) во второе граничное условие (2.51), после несложных вычислений, получим:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -M_\xi \eta^{-2} \mathbf{C} \times \mathbf{j}_3, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = -M_\xi \eta^{-2} \left(\mathbf{C} \times \mathbf{j}_3 \cos(M_\xi \eta^{-2}) - \mathbf{C} \sin(M_\xi \eta^{-2}) \right), \quad (2.54)$$

Что ведет к связанным граничным условиям для производной функции \mathbf{u}_1 :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \cos(M_\xi \eta^{-2}) + \left. \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \times \mathbf{j}_3 \sin(M_\xi \eta^{-2}). \quad (2.55)$$

Причем система (2.55) совместима, т.к. очевидно, что определитель (2.57) имеет вид:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(M_\xi \eta^{-2}) & \sin(M_\xi \eta^{-2}) \\ -\sin(M_\xi \eta^{-2}) & \cos(M_\xi \eta^{-2}) \end{pmatrix} = 1. \quad (2.56)$$

Таким образом три векторных граничных условия для приближенного уравнения (2.16) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{u}_1|_{\xi=0,1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \cos(M_\xi \eta^{-2}) + \left. \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} \right|_{\xi=0} \times \mathbf{j}_3 \sin(M_\xi \eta^{-2}). \quad (2.57)$$

2.3 Метод обобщенных функций для уравнений динамики буровой штанги

В данной подразделе рассматривается применение аппарата теории обобщенных функций к задачам колебания упругих стержней. Метод обобщенных функций является эффективным методом исследования задач математической физики, в силу того что классическое понятие дифференцируемости решений уравнений порой может резко сужать класс задач, полезных для приложений. При этом несущественен тип уравнений, он может быть эллиптическим, параболическим, гиперболическим или даже смешанного типа. Решение динамических задач на основе метода обобщенных функций требует введения понятия обобщенного решения, что связано с построением фундаментальных решений для исследуемых уравнений, особенностью которых является принадлежность к классу обобщенных функций. Поэтому на первом этапе рассматривается случай плоских стационарных колебаний буровой колонны.

2.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим буровую колонну как упругий стержень длины L , который характеризуется плотностью ρ , жесткостью EJ , площадью поперечного сечения A , вращается с постоянной угловой скоростью ω и находится под действием постоянной продольной нагрузки T . Поперечные перемещения сечений стержня задаем уравнением вида [28]:

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho \omega^2 A u + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(z, t), \quad (2.58)$$

с граничными условиями шарнирного опирания стержня:

$$\begin{aligned} u(\pm l, t) &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{z=\pm l} &= 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Здесь $u(z, t)$ – компоненты поперечных перемещений, $l = L/2$, $f(z, t)$ – действующая на стержень сила. В нашем случае будем рассматривать периодическую во времени силу вида

$$f(z, t) = f(z) \exp(-i\lambda t). \quad (2.60)$$

Для простоты введем следующие обозначения $c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$, $q = \frac{T}{\rho A}$. Тогда (2.58) примет следующий вид:

$$c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + q \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \omega^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tilde{f}(z, t), \quad (2.61)$$

где $\tilde{f}(z, t) = \frac{f(z, t)}{\rho A}$, далее знак \sim опускается.

2.3.2 Обобщенное решение краевой задачи

В силу гармоничности по времени действующих сил и граничных условий, решение задачи можно искать в виде $u(z, t) = u(z) \exp(-i\lambda t)$, где комплексные амплитуды удовлетворяют следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$c^2 \frac{d^4 u}{dz^4} + q \frac{d^2 u}{dz^2} - \omega^2 u + \lambda^2 u = f(z). \quad (2.62)$$

Для решения задачи используем метод обобщенных функций, основные идеи которого изложены в [100, 101]. Для этого представим обобщенное решение краевой задачи в виде:

$$\hat{u}(z) = u(z) H(l - |z|),$$

где $H(z)$ – функция Хевисайда, равная 0.5 в точке разрыва, $u(z)$ – ее классическое решение. Из (5), используя операцию дифференцирования регулярных кусочно-дифференцируемых обобщенных функций [102], получим на $S'(R^1)$:

$$\begin{aligned} c^2 \frac{d^4 \hat{u}}{dz^4} + q \frac{d^2 \hat{u}}{dz^2} - \omega^2 \hat{u} + \lambda^2 \hat{u} = f(z) H(l - |z|) + q \left(\frac{du}{dz} \Big|_{z=-l} \delta(z+l) - \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} \delta(z-l) \right) + \\ + c^2 \left(\frac{d^3 u}{dz^3} \Big|_{z=-l} \delta(z+l) - \frac{d^3 u}{dz^3} \Big|_{z=l} \delta(z-l) + \frac{du}{dz} \Big|_{z=-l} \delta''(z+l) - \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} \delta''(z-l) \right), \end{aligned} \quad (2.63)$$

$\delta(z)$ – функция Дирака. Коротко запишем это уравнение в виде:

$$c^2 \frac{d^4 \hat{u}}{dz^4} + q \frac{d^2 \hat{u}}{dz^2} - \omega^2 \hat{u} + \lambda^2 \hat{u} = \hat{f}(z) + \hat{G}(z, u'(-l), u'(l), u'''(-l), u'''(l)). \quad (2.64)$$

Требуется определить решение (2.64) при полученной сингулярной правой части, которая зависит от значений производных искомой функции в граничных точках.

Решение уравнения (2.64) имеет вид свертки:

$$\hat{u}(z) = U(z, \lambda) * \hat{f}(z) + U(z, \lambda) * \hat{G}(z, \dots), \quad (2.65)$$

где $U(z, \lambda)$ – фундаментальное решение уравнения (2.62):

$$c^2 \frac{d^4 U}{dz^4} + q \frac{d^2 U}{dz^2} - \omega^2 U + \lambda^2 U = \delta(z). \quad (2.66)$$

Как известно, если такая свертка существует, то обобщенное решение существует и оно единственное. А если оно регулярное и дифференцируемое, то совпадает с классическим.

Подставляя в (2.65) правую часть (2.63) и вычисляя, получим решение задачи в виде:

$$\begin{aligned} u(z)H(l-|z|) = & \hat{f}(z) * U(z, \lambda) + q \left(\frac{du}{dz} \Big|_{z=-l} U(z+l, \lambda) - \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} U(z-l, \omega) \right) + \\ & + c^2 \left(\frac{d^3 u}{dz^3} \Big|_{z=-l} U(z+l, \lambda) - \frac{d^3 u}{dz^3} \Big|_{z=l} U(z-l, \lambda) \right) + \\ & + c^2 \left(\frac{du}{dz} \Big|_{z=-l} \frac{\partial^2 U(z+l, \lambda)}{\partial z^2} - \frac{du}{dz} \Big|_{z=l} \frac{\partial^2 U(z-l, \lambda)}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Формула (2.67) определяет поперечные перемещения стержня по известным перемещениям, углам поворота, изгибающим моментам и перерезывающим силам на его концах. Однако, для каждой краевой задачи задаются только четыре граничных условия, например, в этом случае известны перемещения и изгибающие моменты на концах стержня. Для ее решения надо определить углы поворота и перерезывающие силы на его концах. Для определения недостающих краевых значений следует использовать краевые условия, исходя из свойств фундаментального решения $U(z, \lambda)$.

2.3.3 Фундаментальное решение и его свойства

Фундаментальное решение $U(z, \lambda)$ удастся построить аналитически с помощью обобщенного преобразования Фурье уравнения (2.66). Его трансформанта Фурье имеет следующий вид:

$$\bar{U}(\xi, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\xi, \lambda)}, \quad (2.68)$$

где $\Delta(\xi, \lambda) = c^2 \xi^4 - q \xi^2 - (\lambda^2 + \omega^2) = c^2 (\xi^2 - \lambda_1)(\xi^2 - \lambda_2)$.

Корни квадратного относительно ξ^2 уравнения $\Delta(\xi, \lambda) = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4c^2(\lambda^2 + \omega^2)}}{2c^2},$$

зависят только от трех параметров стержня: $c, \alpha = \frac{q}{2c}, \omega$. Размерность

$$[\alpha] = [\omega] = [\lambda].$$

В этих параметрах

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \lambda^2 + \omega^2}}{c}.$$

Их асимптотика по частоте, следующая:

$$\text{a) при } \lambda \rightarrow \infty: \lambda_1 \sim \frac{\lambda}{c}, \lambda_2 \sim -\frac{\lambda}{c}, \quad (2.69)$$

$$\text{b) при } \lambda \rightarrow 0: \lambda_1 \sim \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{c}, \lambda_2 \sim \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{c}. \quad (2.70)$$

Для построения оригинала удобно разложить $\frac{1}{\Delta(\xi, \lambda)}$ в простые дроби.

Тогда компоненты трансформанты (2.68) преобразуются к виду:

$$\bar{U}(\xi, \lambda) = \frac{1}{c^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{1}{\xi^2 - \lambda_1} - \frac{1}{\xi^2 - \lambda_2} \right). \quad (2.71)$$

Из (2.71) видно, что для построения оригинала U надо построить оригинал функции

$$\psi^*(\xi, \lambda) = (\xi^2 - \lambda)^{-1} = F_z[\psi(z, \lambda)].$$

Используя свойство непрерывности преобразования Фурье обобщенных функций, нетрудно показать, что функция $\frac{\sin(k|z|)}{k}$ имеет обобщенное преобразование Фурье вида:

$$F_z \left[\frac{\sin(k|z|)}{k} \right] = \left(\frac{1}{(\xi^2 - (k+i0)^2)} + \frac{1}{(\xi^2 - (k-i0)^2)} \right),$$

откуда следует, что

$$\psi(z, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}|z|)}{2\sqrt{\lambda}}. \quad (2.72)$$

Таким образом, используя (2.72), получим выражение для фундаментального решения:

$$U(z, \omega) = \frac{1}{4c\sqrt{\alpha^2 + \omega^2 + w^2}} \left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda_1}|z|)}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_2}|z|)}{\sqrt{\lambda_2}} \right). \quad (2.73)$$

Заметим, что риманова поверхность фундаментального решения по λ однолистная, т.к. значения $U(z, \lambda)$ не зависят от выбора знака радикалов $\sqrt{\lambda_{1,2}}$.

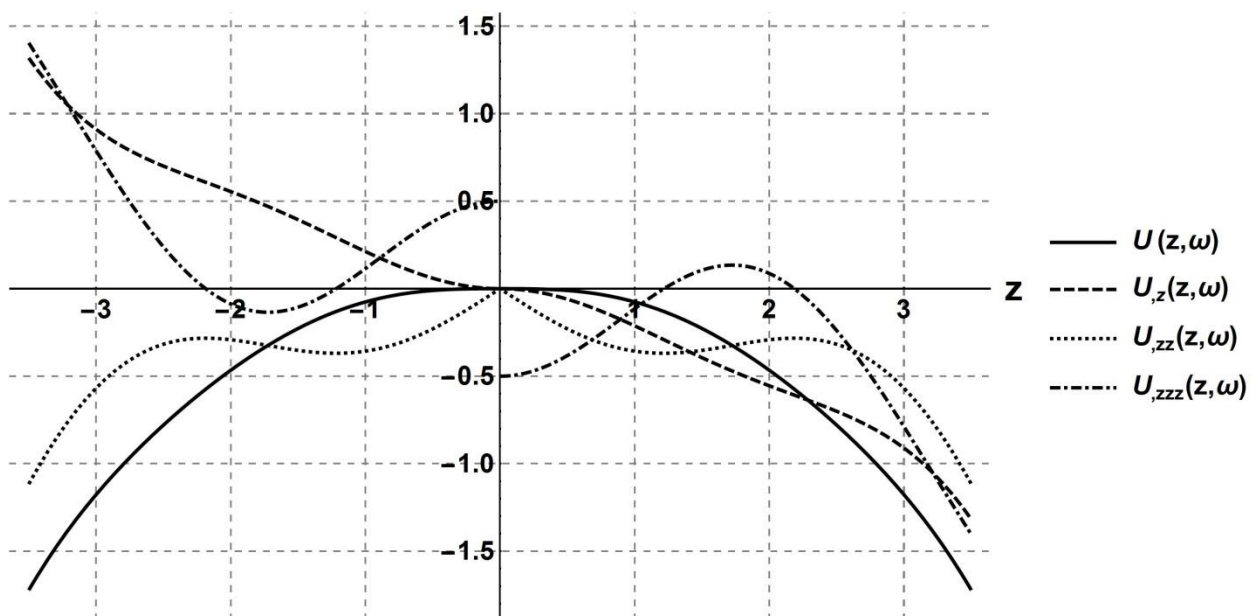


Рисунок 13 – Фундаментальное решение $U(z, \lambda)$ и его производные до 3-го порядка при $\lambda = 1$ ($c = 1, q = 1, \alpha = 1$)

Из рисунка видно, что фундаментальное решение и его первые две производные являются регулярными обобщенными функциями, непрерывными в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned} U(\pm 0, \lambda) = U(0, \lambda) = 0, \quad U_{,z}(\pm 0, \lambda) = U_{,z}(0, \lambda) = 0, \\ U_{,zz}(\pm 0, \lambda) = U_{,zz}(0, \lambda) = 0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

а его третья производная

$$U_{,zzz}(z, \lambda) = \frac{1}{4c\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2 + \omega^2}} \left(\lambda_2 \cos(\sqrt{\lambda_2} z) - \lambda_1 \cos(\sqrt{\lambda_1} z) \right) \operatorname{sgn}(z)$$

в этой точке терпит разрыв первого рода:

$$U_{,zzz}(\pm 0, \lambda) = \pm \frac{1}{2c^2} \quad (2.75)$$

(верхнему знаку соответствует левый предел в нуле, нижнему – правый). Эти особенности наглядно продемонстрированы на рисунке 13 ($U_{,z} = \frac{\partial U}{\partial z}$ и т.д.).

2.3.4 Разрешающие уравнения краевой задачи

Используя (2.65) и предельные свойства $U(z, \lambda)$ и ее производных при $z \rightarrow \pm 0$ (2.74), а также решение (2.67), получим систему из четырех линейных алгебраических уравнений в левой и правой граничных точках для определения четырех неизвестных функций на концах стержня:

$$\begin{aligned} 0 &= -q\theta_2 U(-2l, \lambda) - c^2 Q_2 U(-2l, \lambda) - c^2 \theta_2 U_{,zz}(-2l, \lambda) + \hat{f}(z) * U(z, \lambda) \Big|_{z=-l}, \\ 0 &= q\theta_1 U(2l, \lambda) + c^2 Q_1 U(2l, \lambda) + c^2 \theta_1 U_{,zz}(2l, \lambda) + \hat{f}(z) * U(z, \lambda) \Big|_{z=l}, \\ 0.5\theta_1 &= -q\theta_2 U_{,z}(-2l, \lambda) - c^2 Q_2 U_{,z}(-2l, \lambda) - c^2 \theta_2 U_{,zzz}(-2l, \lambda) + \hat{f}(z) * U_{,z}(z, \lambda) \Big|_{z=-l}, \\ 0.5\theta_2 &= q\theta_1 U_{,z}(2l, \lambda) + c^2 Q_1 U_{,z}(2l, \lambda) + c^2 \theta_1 U_{,zzz}(2l, \lambda) + \hat{f}(z) * U_{,z}(z, \lambda) \Big|_{z=l}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

где θ_1 и θ_2 – углы поворота на левом и правом концах стержня, соответственно; Q_1 и Q_2 – перерезывающие силы на концах стержня.

Если $\hat{f}(z)$ – регулярная функция, то

$$\hat{f}(z) * U(z, \lambda) = H(l - |z|) \int_{-l}^l f(y) U(z - y, \lambda) dy. \quad (2.77)$$

Для сингулярной $\hat{f}(z)$ – следует пользоваться определением свертки [102].

Разрешающую систему уравнений (2.76) представим в матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 0 & (qU + c^2U_{,zz})_{(-2l)} & 0 & c^2U(-2l, \lambda) \\ -(qU + c^2U_{,zz})_{(2l)} & 0 & -c^2U(2l, \lambda) & 0 \\ 0.5 & (qU_{,z} + c^2U_{,zzz})_{(-2l)} & 0 & c^2U_{,z}(-2l, \lambda) \\ -(qU_{,z} + c^2U_{,zzz})_{(2l)} & 0.5 & -c^2U_{,z}(2l, \lambda) & 0 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{array} \right\} = \left\{ \hat{f}(z) * U(z, \lambda) \Big|_{z=-l}, \hat{f}(z) * U(z, \lambda) \Big|_{z=l}, \hat{f}(z) * U_{,z}(z, \lambda) \Big|_{z=-l}, \hat{f}(z) * U_{,z}(z, \lambda) \Big|_{z=l} \right\}^T. \quad (2.78)$$

Такую систему линейных алгебраических уравнений легко построить для любой краевой задачи, оставляя в левой части слагаемые с неизвестными краевыми значениями искомых функций и перенося в правую часть – с известными.

Представим (2.78) в следующем виде:

$$\{M_{ij}(l, \lambda)\}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(l, \lambda) \\ b_2(l, \lambda) \\ b_3(l, \lambda) \\ b_4(l, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Определитель матрицы M_{ij} определяет спектр собственных упругих колебаний стержня, частоты которых должны удовлетворять характеристическому уравнению

$$\det \{M_{ij}(l, \lambda_k^*)\} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.80)$$

В силу (2.73), это сложное трансцендентное уравнение, корни которого можно определять численно с помощью различных стандартных программ.

В случае собственных колебаний существование решений и его единственность определяется рангом расширенной матрицы системы, который зависит от действующих источников возмущений.

Для несобственных колебаний решение системы единственно и его определяем методом Крамера. После определения недостающих граничных функций с помощью формулы (2.64) определяем перемещения в стержне.

2.4 Потенциал упругого деформирования стержневых элементов при конечных деформациях

Ранее было отмечено, что в литературе широко представлены линейные математические модели, моделирующие упругое движение объектов в случае малых деформаций. Тем не менее, объекты могут испытывать различные типы деформирования в зависимости от вида действующих на них нагрузок (статических, динамических, ударных и др.) и топологии исследуемого объекта.

Так в случае конечных деформаций моделирование упругого движения исследуемого объекта значительно усложняется за счет нелинейности модели.

В данной разделе и далее в работе применяется известная нелинейная теория конечных деформаций В.В. Новожилова, позволяющая разрабатывать строгие аналитические модели упругого движения геометрически нелинейных элементов механизмов и машин [103]. Среди ряда других известных геометрически нелинейных теорий упругости, теория конечных деформаций В.В. Новожилова является строго обоснованной, удобной для практических приложений и построена на математически строгих и физически ясных системах упрощений, которые позволяют рассматривать всевозможные нелинейные технические задачи в различных упрощениях и приближениях.

Для разработки единой методологии изучения и построения математических моделей движения упругих деформируемых сред с учетом конечных деформаций используется обобщенный потенциал упругого пространственного деформирования среды [39, с. 24]. Согласно теории конечных деформаций В.В. Новожилова для построения потенциала упругого деформирования конечные деформации среды задаются как [103, с.21]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right], \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right], \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right], \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y}, \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z}, \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

где $U(x, y, z, t)$, $V(x, y, z, t)$, $W(x, y, z, t)$ – компоненты перемещения по осям x, y, z , соответственно. Учитывается, что компоненты тензора деформаций, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}, \\
e_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \quad e_{zx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}, \\
\omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Здесь e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} определяют относительные удлинения параллельно осям x, y, z , соответственно; e_{xy}, e_{yz}, e_{zx} – сдвиги; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – углы поворота относительно соответствующих осей.

Используя обозначения (2.82) и подставляя в (2.81), получим:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= e_{xx} + \left[e_{xx}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right)^2 \right], \\
\varepsilon_{yy} &= e_{yy} + \left[e_{yy}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right)^2 \right], \\
\varepsilon_{zz} &= e_{zz} + \left[e_{zz}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right)^2 \right], \\
\varepsilon_{xy} &= e_{xy} + e_{xx} \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) + e_{yy} \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) + \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right), \\
\varepsilon_{xz} &= e_{xz} + e_{xx} \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right) + e_{zz} \left(\frac{1}{2} e_{xz} - \omega_y \right) + \left(\frac{1}{2} e_{xy} + \omega_z \right) \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right), \\
\varepsilon_{yz} &= e_{yz} + e_{yy} \left(\frac{1}{2} e_{yz} - \omega_x \right) + e_{zz} \left(\frac{1}{2} e_{yz} + \omega_x \right) + \left(\frac{1}{2} e_{xy} - \omega_z \right) \left(\frac{1}{2} e_{xz} + \omega_y \right).
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Известные в каждой точке исследуемого тела шесть величин (2.83), полностью определяют его деформацию. При этом компоненты $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ характеризуют удлинения тех линейных элементов, которые до деформации были параллельны координатным осям, а $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$ – сдвиги.

Будем предполагать, что стержень является изотропным и условия малости накладываются только на удлинения и сдвиги; перемещения и углы поворота не ограничиваются. Тогда существует линейная связь между напряжениями и деформациями, выражающая обобщенный закон Гука для изотропного физически линейного тела на случай пространственной [103, с. 116]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right], \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right], \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right], \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \sigma_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G} \sigma_{zx}.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

где E – модуль Юнга (модуль упругости материала), ν – коэффициент Пуассона, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига.

Заметим, что область малых деформаций, в которой закон Гука будет приближенно справедлив, отличается для различных материалов.

Таким образом, в дальнейшем, исследуя движение буровой колонны, мы будем рассматривать физически линейные и геометрически нелинейные задачи о деформации упругого изотропного стержня.

Потенциальная энергия деформации стержня определяется формулой Клапейрона [104]:

$$U_p = \iiint_{V_0} \Phi dV_0 = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV_0, \quad (2.85)$$

где Φ есть потенциал упругого деформирования, $i, j = 1, 2, 3$ ($\sigma_{xx} = \sigma_{11}$, $\sigma_{xy} = \sigma_{12}$ и т.д.).

Из (2.85) видно, что

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (2.86)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} и тензора деформаций ε_{ij} связаны с потенциалом следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Подставляя компоненты деформации (2.84) в (2.86), получим выражение для упругого потенциала Φ в напряжениях:

$$\Phi = \frac{1}{2E} \left[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu (\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx}) + 2(1+\nu) (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right]. \quad (2.87)$$

Аналогично, через напряжения можно найти потенциал Φ , выраженный в деформациях:

$$\Phi = G \left[\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \right] \quad (2.88)$$

или

$$\Phi = G \left[\left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx}) + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \right] \quad (2.89)$$

Далее применяя вторую систему упрощений по В.В. Новожилову, согласно которой компоненты деформации и углы поворота в формулах (2.83) полагаются малыми по сравнению с единицей, что позволяет пренебречь в (2.83) величинами второго и более порядка малости, удерживая при этом углы поворота во второй степени.

Тем самым, первая формула (2.83) запишется в следующем виде:

$$\varepsilon_{xx} \approx e_{xx} + \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2).$$

Аналогично, упрощая и остальные из формул (2.83), приходим к следующим выражениям для компонент деформации согласно рассматриваемой системе упрощений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &\approx e_{xx} + \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2), & \varepsilon_{yy} &\approx e_{yy} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_z^2), \\ \varepsilon_{zz} &\approx e_{zz} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2), & \varepsilon_{xy} &\approx e_{xy} - \omega_x \cdot \omega_y, \\ \varepsilon_{yz} &\approx e_{yz} - \omega_y \cdot \omega_z, & \varepsilon_{zx} &\approx e_{zx} - \omega_z \cdot \omega_x. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Уравнение функционала упругого деформирования (2.89) с учетом упрощений (2.90) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Phi = G & \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} \left\{ \left(e_{xx} + \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2) \right)^2 + \left(e_{yy} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_z^2) \right)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(e_{zz} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) \right)^2 \right\} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \left\{ \left(e_{xx} + \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2) \right) \left(e_{yy} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_z^2) \right) + \right. \\
& \left. + \left(e_{xx} + \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2) \right) \left(e_{zz} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) \right) + \right. \\
& \left. + \left(e_{yy} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_z^2) \right) \left(e_{zz} + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) \right) \right\} + \\
& \left. + 2 \left\{ (e_{xy} - \omega_x \omega_y)^2 + (e_{xz} - \omega_x \omega_z)^2 + (e_{yz} - \omega_y \omega_z)^2 \right\} \right]. \tag{2.91}
\end{aligned}$$

Общность потенциала (2.91) позволит переходить к различным типам деформирования исследуемых объектов, в частности, стержневых элементов, какими можно считать буровые колонны. Его представление через компоненты тензора деформаций представляет интерес при моделировании и решении задач динамики упругих систем, так как динамический анализ предполагает определение перемещений и их производных (скоростей, ускорений).

2.5 Разработка модели движения сжато-скрученной буровой штанги при конечных деформациях для изгибно-крутильных колебаний.

Одним из характерных типов деформирования вращающихся стержневых элементов является кручение. Известно, что под действием переменных внешних воздействий стержень может совершать так называемые крутильные колебания. В случае чистого кручения допускается гипотеза плоских сечений, когда его поперечные сечения остаются плоскими и поворачиваются без какого-либо искажения одно относительно другого, вращаясь вокруг оси стержня OZ [52, 104-106].

В общем случае кручение стержней может сопровождаться депланацией сечения, когда плоские до деформации поперечные сечения искривляются по некоторой поверхности, и, как следствие, не сохраняется их перпендикулярность оси стержня. Депланация сечения имеет место для круговых цилиндрических стержней, а также стержней с несимметричным профилем [106-108]. Она может быть вызвана также действием поперечной нагрузки, которая при этом вызывает не только изгиб, но и закручивание стержня.

Поэтому появляется необходимость учета совместных изгибно-крутильных колебаний стержней, которые могут привести к появлению автоколебательных движений, создающих опасные перемещения и напряжения в конструкции [107, 108].

В большинстве работ по динамике упругих стержневых элементов конструкций изгибно-крутильные колебания исследовались в линейной

постановке [107, 108, 110-115 и др.]. Большой вклад в развитие кручения стержней с учетом их деформации внесли работы С. П. Тимошенко, А.П. Филиппова, Ю.С. Воробьева, Б.Ф. Шорра и других современных авторов. Разработанные ими модели также линейны. Лишь в немногих работах рассматриваются проблемы кручения стержней в нелинейной постановке [52, 110, 116-119 и др.]. Тем не менее, авторы этих работ также в ходе решения и анализа моделей делают те или иные допущения, как это делает в своих работах В.И. Ерофеев, Аврамов К.В., Галас О.С. и др. Так, изучая связанные изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные упругие волны в прямолинейных стержнях, пренебрегают нелинейностями при старших производных, полагая, что их вклад является малым в достаточно широком частотном диапазоне [52]. Автор работы [116] учитывает в модели деформацию поперечного сечения стержня. Но исследуя систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих нелинейные изгибно-крутильные колебания закрученных стержней, при дискретизации системы задает колебания в виде разложения в ряд по собственным формам линейной задачи.

Малая исследованность колебаний, возникающих в сжато-скрученных стержнях без ограничений на величины их деформаций, делает данную проблему актуальной и представляющей прикладной интерес в области нефтегазодобывающей промышленности применительно к буровым штангам.

В связи с этим в данном подразделе моделируются изгибно-крутильные колебания буровых штанг неглубинного бурения без ограничений на величины деформаций. Нелинейная модель, как и в предыдущем подразделе, строится в рамках нелинейной теории упругости В.В. Новожилова [103].

Согласно А.П. Филиппова [105], в общем случае пространственного перемещения любой точки стержня можно записать в виде:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u_1(z, t) + u_2(z, t) + \theta(z, t)y, \\ V(x, y, z, t) &= v_1(z, t) + v_2(z, t) - \theta(z, t)x, \\ W(x, y, z, t) &= w(z, t) - \frac{\partial u_1(z, t)}{\partial z}x - \frac{\partial v_1(z, t)}{\partial z}y + \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z}\phi(x', y'), \end{aligned} \quad (2.92)$$

где $u_1(z, t)$, $v_1(z, t)$ – перемещение центра изгиба поперечного сечения вдоль осей x , y вследствие изгиба; $u_2(z, t)$, $v_2(z, t)$ – вследствие сдвига; $w(z, t)$ – поступательное смещение вдоль оси z ; $\theta(z, t)$ – угол поворота сечения относительно центра изгиба при кручении. При этом точки поперечного сечения получают следующие перемещения вдоль осей x , y :

$$u = \theta y, \quad v = -\theta x;$$

$\frac{\partial u_1(z,t)}{\partial z}$, $-\frac{\partial v_1(z,t)}{\partial z}$ – углы поворота сечений вокруг осей x и y , берущих начало на нейтральной оси стержня, при изгибе. Тем самым перемещение точек поперечного сечения вдоль оси z выражается как

$$-\frac{\partial u_1(z,t)}{\partial z} x - \frac{\partial v_1(z,t)}{\partial z} y;$$

$\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} \phi(x', y')$ – перемещение точек поперечного сечения вследствие деформации.

Ось z направлена вдоль оси стержня, а оси x и y лежат в плоскости сечения стержня.

Рассматривается частный случай (2.92) пространственного деформирования штанги с учетом поперечных колебаний в двух главных плоскостях стержня $u_1(z,t)$, $v_1(z,t)$ и с учетом закручивания $\theta(z,t)$, тогда компоненты перемещения (2.92) задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u_1(z, t) + \theta(z, t) y; \\ V(x, y, z, t) &= v_1(z, t) - \theta(z, t) x; \\ W(x, y, z, t) &= -\frac{\partial u_1(z, t)}{\partial z} x - \frac{\partial v_1(z, t)}{\partial z} y. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Деформацией сечений пренебрегаем. Предполагается, что центр масс и центр изгиба поперечного сечения совпадают, ввиду симметричности кольцевого сечения стержня: $x_s = 0$, $y_s = 0 \Rightarrow x_1 = x$, $y_1 = y$.

Для этого случая относительные удлинения и углы поворота волокна после деформации (2.82) есть:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= 0; \quad e_{yy} = 0; \quad e_{zz} = -\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} x - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} y; \\ e_{xy} &= 0; \quad e_{xz} = \frac{\partial \theta}{\partial z} y; \quad e_{yz} = -\frac{\partial \theta}{\partial z} x; \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} x - \frac{\partial v_1}{\partial z}; \quad \omega_y = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} y + \frac{\partial u_1}{\partial z}; \quad \omega_z = -\theta. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Тогда потенциал упругого деформирования для данного случая определяется как:

$$\Phi = G \left[\frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{1}{2} (\omega_x^4 + \omega_y^4 + \omega_z^4) + (1-\nu) e_{zz}^2 + 2\nu e_{zz} \omega_z^2 + e_{zz} (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5-6\nu}{2} (\omega_x^2 \omega_y^2 + \omega_x^2 \omega_z^2 + \omega_y^2 \omega_z^2) \right) + 2(e_{xz}^2 + e_{yz}^2 - 2(e_{xz} \omega_x \omega_z + e_{yz} \omega_y \omega_z)) \right] \quad (2.95)$$

или в характерных, для данного случая, компонентах тензора деформаций:

$$\Phi = G \left[\frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} x - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^4 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} y + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^4 + \theta^4 \right) + (1-\nu) \left(-\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} x - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} y \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\nu \left(-\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} x - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} y \right) \theta^2 + \left(-\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} x - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} y \right) \left(\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} x - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} y + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. \left. + \frac{5-6\nu}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} x - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} y + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} x - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \theta^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} y + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \theta^2 \right) + \right. \\ \left. \left. + 2 \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} y \right)^2 + \left(-\frac{\partial \theta}{\partial z} x \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} y \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} x - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} x \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} y + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \theta \right] \right] \right]. \quad (2.96)$$

Для вывода основных дифференциальных уравнений движения, определяющих поперечные перемещения и закручивание стержня относительно его первоначального недеформированного положения, используется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона. Ограничения на величины деформаций снимаются. Тогда потенциальная энергия упругого деформирования определяется из (2.85) как:

$$U_p = \int_0^l \left[\frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} I_r \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^4 + \frac{3}{2} I_y \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{3}{2} I_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. A \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^4 + A \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^4 + A \theta^4 \right) + (1-\nu) \left(\left(I_y \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right)^2 + 2I_{xy} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + I_x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. \left. + I_y \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - I_{xy} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + I_{xy} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - I_x \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) + \frac{G(5-6\nu)}{2(1-2\nu)} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{16} I_{x^2 y^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^4 + \frac{1}{4} I_y \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 - I_{xy} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{4} I_x \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. \left. + A \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} I_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \theta^2 + A \theta^2 \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \right) \right) + 2GI_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] dz, \quad (2.97)$$

где $I_x = \int_A y^2 dA$, $I_y = \int_A x^2 dA$ - осевые моменты инерции поперечного сечения стержня; $I_{xy} = \int_A xy dA$ - центробежный момент инерции поперечного сечения стержня; $I_p = \int_A r^2 dA$ - полярный момент инерции поперечного сечения относительно центра тяжести, $r^2 = x^2 + y^2$.

При определении кинетической энергии буровой колонны учитываем номинальное вращательное движение штанги, так как для проведения неглубинных буровых работ в основном применяется вращательный способ бурения скважин.

Колонна рассматривается как сжато-скрученный вращающийся стержень симметричного поперечного сечения. Вводятся две системы координат: глобальная (неподвижная) $Oxyz$ и локальная $Ox'y'z'$, вращающаяся вместе с буровой штангой. Оси Oz и Oz' направлены вдоль оси стержня. Пусть вращение стержня происходит против часовой стрелки.

Переход от глобальной системы координат к локальной задается следующим образом:

$$\begin{cases} x' = (x+U)\cos\phi + (y+V)\sin\phi, \\ y' = -(x+U)\sin\phi + (y+V)\cos\phi, \\ z' = z+W. \end{cases} \quad (2.98)$$

Здесь $\phi = \omega t$ - угол, на который поворачивается штанга при вращении; ω - угловая скорость вращения штанги.

Кинетическая энергия определяется как:

$$U_k = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \rho (\dot{\bar{R}} \cdot \dot{\bar{R}}) dV_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \int_F \rho (\dot{\bar{R}} \cdot \dot{\bar{R}}) dF dz, \quad (2.99)$$

где \bar{R} - радиус-вектор, определяющий положение любой точки стержня.

В рассматриваемом случае он имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{R} = & ((x+U)\cos(\omega t) + (y+V)\sin(\omega t))\bar{i} + \\ & + (-(x+U)\sin(\omega t) + (y+V)\cos(\omega t))\bar{j} + (z+W)\bar{k}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - единичные векторы. Тогда согласно (2.99) кинетическая энергия вращающегося стержня с учетом пространственного изгиба и угла закручивания сечения $\theta(z, t)$ определяется как:

$$U_k = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \int_{A(z)} \left[\left(\frac{dU}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dt} \right)^2 \right] + \omega^2 [x^2 + y^2 + U^2 + V^2 + 2Ux + 2Vy] + \quad (2.101)$$

$$+ 2\omega \left[-\frac{dV}{dt} x + \frac{dU}{dt} y + \frac{dU}{dt} V - \frac{dV}{dt} U \right] dA(z) dz,$$

где первый интеграл без угловой скорости ω представляет собой кинетическую энергию не вращающегося стержня; второй интеграл при ω^2 – работу центробежных сил; третий интеграл при ω – работу кориолисовых сил [120]. Переходя к соответствующим компонентам деформации, кинетическую энергию изгибно-крутильных колебаний определяем, как:

$$U_k = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[A \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + A \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^2 + I_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} \right)^2 + \right. \quad (2.102)$$

$$+ 2I_{xy} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} + I_x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} \right)^2 + I_p \omega^2 + A(u_1^2 + v_1^2) \omega^2 +$$

$$\left. + I_p \theta^2 \omega^2 + 2\omega I_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + 2\omega A v_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - 2\omega A u_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} \right] dz.$$

Определяется потенциал внешней нагрузки:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left(T(z, t) \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \right] + M_z(t) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right] \right) dz. \quad (2.103)$$

Подставляя (2.97), (2.102) и (2.103) в (2.1), после варьирования полной энергии буровой колонны, согласно методу Остроградского-Гамильтона, получим нелинейную модель ее колебаний с учетом поперечных колебаний и кручения:

$$-\rho A \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \rho I_y \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A \omega^2 u_1 - 2\rho A \omega \frac{\partial v_1}{\partial t} - T(z, t) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M(t) \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) -$$

$$-EI_y \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + \frac{EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^3 \right] - \frac{EI_y (8-6\nu)}{8(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{EI_y}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \right] +$$

$$\frac{E(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \left(A \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u_1}{\partial z} \left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 + \theta^2 \right) \right] + \frac{1}{2} I_{xy} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -\rho A \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \rho I_y \frac{\partial^4 v_1}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A \omega^2 v_1 + 2\rho A \omega \frac{\partial u_1}{\partial t} - T(z, t) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M(t) \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) - \\
& -EI_y \frac{\partial^4 v_1}{\partial z^4} + \frac{EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^3 \right] - \frac{EI_y (8-6\nu)}{8(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{EI_y}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \right] + \frac{E(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \left(A \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v_1}{\partial z} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \theta^2 \right) \right] \right) = 0, \\
& -\rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{2EI_p}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{3EI_r}{8} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^3 \right] - \frac{EA}{(1-\nu)} \theta^3 + \rho I_p \omega^2 \theta + \\
& + \frac{EI_y (11-6\nu)}{8(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \right) \right] + \frac{EI_y}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{E(5-6\nu)}{4(1-\nu)} \left(\frac{1}{2} I_p \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} I_p \theta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - 2A\theta \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \right] \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Система нелинейных многомерных уравнений (2.104) описывает изгибно-крутильные колебания вращающейся буровой штанги с учетом их конечных деформаций. Она является расширением известных моделей упругих колебаний стержневого элемента А.П. Филиппова [105] и В.И. Ерофеева [52]. Модели А.П. Филиппова рассматривались в линейной постановке, когда деформации малы, в моделях же В.И. Ерофеева не учитывалось вращение стержневого элемента. Построенная здесь модель включает как конечные деформации стержневого элемента, так и его вращение вокруг упругой оси.

Из (2.104) можно легко получить частный случай для изгибных колебаний, для этого достаточно не учитывать в (2.93) закручивание $\theta(z, t)$. Тогда из (2.104) получим:

$$\begin{aligned}
& -\rho A \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \rho I_y \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A \omega^2 u_1 - 2\rho A \omega \frac{\partial v_1}{\partial t} - T(z, t) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M(t) \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - \\
& -EI_y \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + \frac{EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^3 \right] + \frac{E(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \left(A \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u_1}{\partial z} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \right] \right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho A \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \rho I_y \frac{\partial^4 v_1}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A \omega^2 v_1 + 2\rho A \omega \frac{\partial u_1}{\partial t} - T(z, t) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M(t) \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) - \\
& -EI_y \frac{\partial^4 v_1}{\partial z^4} + \frac{EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^3 \right] + \frac{E(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \left(A \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v_1}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \right] \right) = 0.
\end{aligned}$$

2.6 Численный анализ нелинейной модели движения сжато-скрученной буровой штанги

2.6.1 Анализ плоских колебаний буровой штанги

В этом подразделе рассмотрен частный случай плоских колебаний для нелинейной математической модели, полученной в предыдущем подразделе и описывающей изгибно-крутильные колебания буровой колонны, представленной в виде изотропного упругого стержня длиной l , с учетом вращения с частотой ω и действия продольной сжимающей нагрузки $T(z, t)$:

$$\begin{aligned}
& -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho I_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A \omega^2 u - T(z, t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \\
& -EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 \right] - \frac{EI_y(8-6\nu)}{8(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{EI_y}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\theta^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{2EI_p}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{3EI_r}{8} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^3 \right] - \frac{EA}{(1-\nu)} \theta^3 + \rho I_p \omega^2 \theta + \\
& + \frac{EI_y(11-6\nu)}{8(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{EI_y}{4(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{E(5-6\nu)}{4(1-\nu)} \left(\frac{1}{2} I_p \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} I_p \theta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - 2A\theta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.107}$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
u(z, t) &= 0 \quad (z=0, z=l), \\
EI_y \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} &= 0 \quad (z=0, z=l), \\
\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} &= 0 \quad (z=0, z=l),
\end{aligned} \tag{2.108}$$

и начальными условиями следующего вида:

$$\begin{aligned}
u(z,t)|_{t=0} = \theta(z,t)|_{t=0} = 0, \\
\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}|_{t=0} = C_1, \quad \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t}|_{t=0} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.109}$$

где $u(z,t)$ – поперечное перемещение частиц срединной линии стержня; $\theta(z,t)$ – угол поворота его поперечного сечения; C_1 – постоянная.

Здесь, в отличие от [52], для плоских изгибно-крутильных колебаний стержня конечной длины ставится начально-краевая задача Коши. В [52] авторы искали решение для похожей модели в виде бегущих упругих волн в стержне бесконечной длины, полагая существование оптимальных демпфирующих устройств на концах стержня.

Для получения решения модели (2.106)-(2.109) был применен метод Бубнова-Галеркина [16]. Сжимающую нагрузку принимали постоянной и распределенной по длине стержня, $T(z,t) = T$.

В соответствии с методом Бубнова-Галеркина, поперечное перемещение $u(z,t)$ в плоскости Ouz и угол поворота $\theta(z,t)$ были представлены в виде рядов:

$$u(z,t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \tag{2.110}$$

$$\theta(z,t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) \cos\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \tag{2.111}$$

соответственно.

Базисные функции $\sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right)$ и $\cos\left(\frac{i\pi z}{l}\right)$ выбраны таким образом, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (2.108).

Реализация метода Бубнова-Галеркина и дальнейшее численное решение были произведены в прикладной программе для символьных вычислений Wolfram Mathematica 10.2.

Для получения численного решения полученной системы уравнений применен метод с переключением жесткости (Stiffness switching method), который включает два численных метода:

- 1) явный метод Рунге-Кутты восьмого порядка,
- 2) линейный неявный метод Эйлера.

Использование двух численных методов обусловлено тем, что исследуемые уравнения оказываются жесткими. Под жесткими уравнениями (системами уравнений) понимаются такие задачи, в которых явные методы не работают [121], т.е. при заданных шагах интегрирования по времени использование явной схемы приводит либо к резкому увеличению числа вычислений, либо к быстрому возрастанию погрешности.

При этом задачи могут оказываться жесткими в одних интервалах и нежесткими в других [122]. Таким образом, пока в системе не возникает жесткость, и численное решение идет гладко, применяется явный метод Рунге-Кутты. Как только система становится жесткой, для численного решения автоматически начинает использоваться неявный метод Эйлера. Данный метод с переключением жесткости применяется не только по причине того, что исследуемые ОДУ являются жесткими, но и ввиду его высокой эффективности по сравнению с другими численными методами [123].

При численных расчетах использовались следующие значения параметров буровой колонны: модуль Юнга $E = 2.1 \times 10^5 \text{ МПа}$, плотность материала $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.28$ (для стальных буровых штанг), внешний диаметр штанги $D = 0.2 \text{ м}$, внутренний диаметр $d = 0.12 \text{ м}$, площадь поперечного сечения колонны

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \approx 2.01 \times 10^{-2} \text{ м}^2,$$

осевой момент инерции

$$I_y = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right) \approx 6.84 \times 10^{-5} \text{ м}^4,$$

полярный момент инерции $I_p = 2I_y$, длина буровой колонны $l = 500 \text{ м}$, частота вращения $\omega = 0.5 \text{ об/мин}$, продольная сжимающая нагрузка $T = 2.2 \times 10^3 \text{ Н}$.

На рисунках 14-15 показаны поперечные и крутильные колебания буровой колонны с функциями перемещений $u(z, t)$ и $\theta(z, t)$, взятых в первых трех приближениях по методу Бубнова-Галеркина (2.112), при заданных параметрах механической системы.

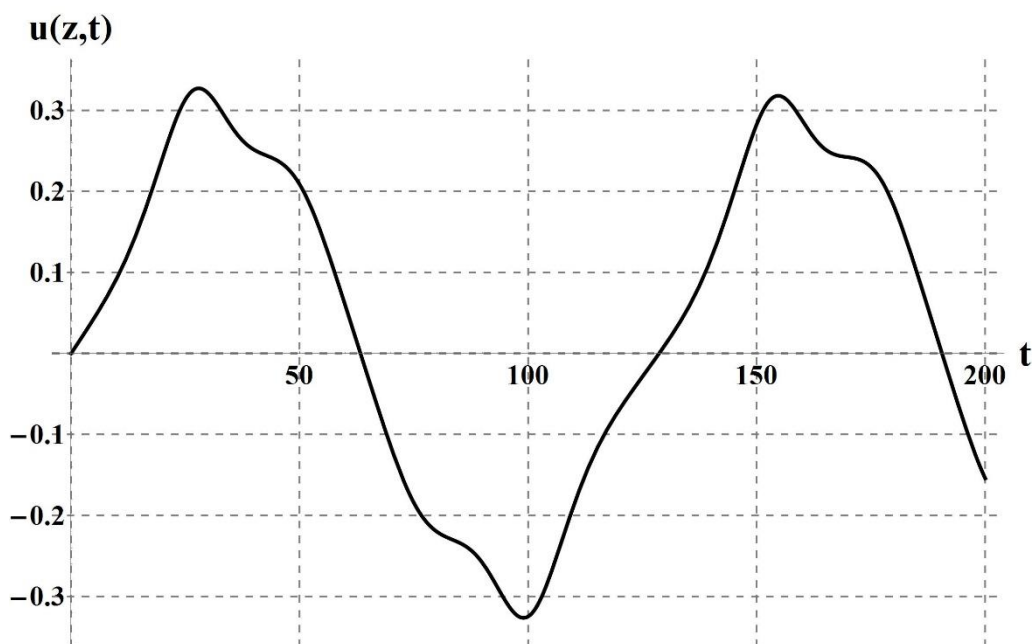


Рисунок 14 – Поперечные колебания буровой колонны по первым трем частотам

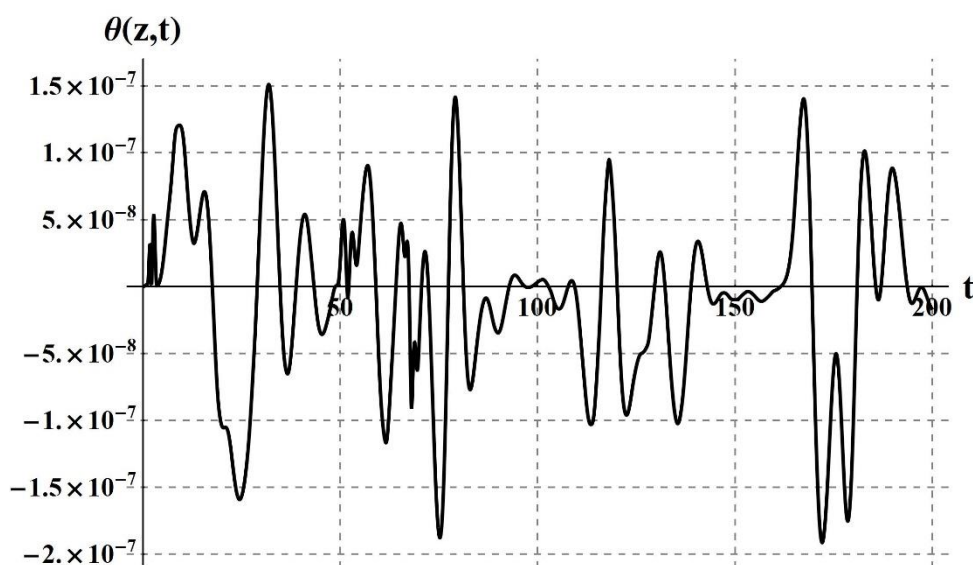


Рисунок 15 – Крутильные колебания буровой колонны по первым трем частотам

$$u(z,t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \quad \theta(z,t) = \sum_{i=1}^3 g_i(t) \cos\left(\frac{i\pi z}{l}\right). \quad (2.112)$$

Полученные графики показывают, что амплитуда поперечных колебаний на несколько порядков превосходит амплитуду крутильных колебаний.

На рисунках 16-17 представлены составляющие для первых трех мод поперечных и крутильных колебаний буровой колонны.

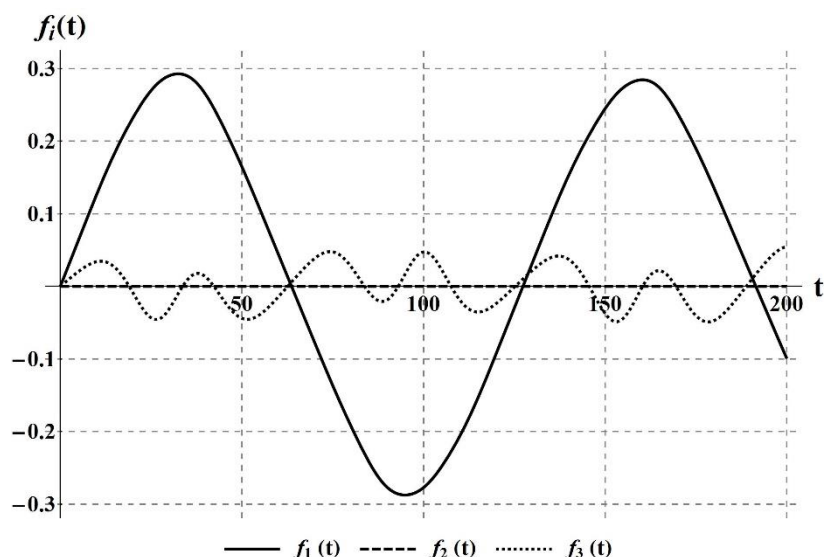


Рисунок 16 – Амплитуды поперечных колебаний буровой колонны по первым трем частотам

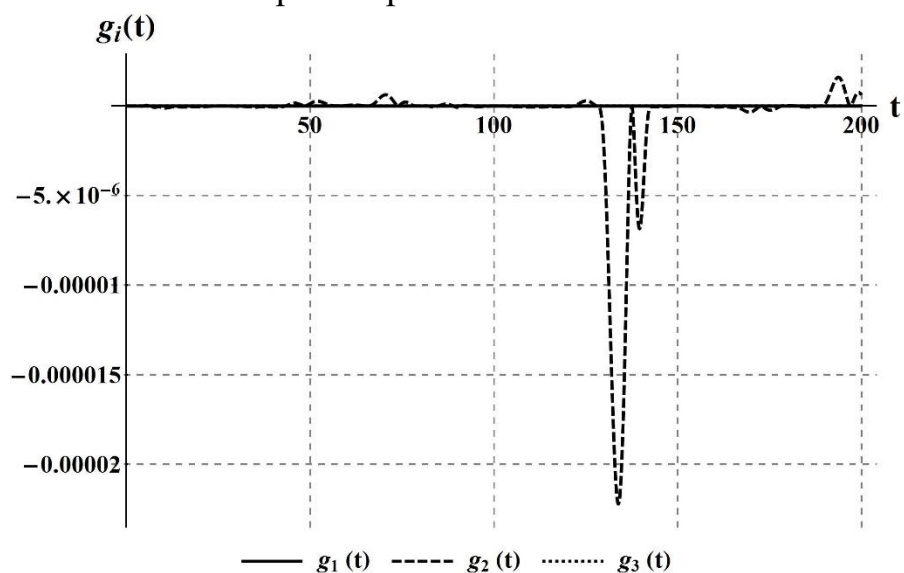


Рисунок 17 – Амплитуды крутильных колебаний буровой колонны по первым трем частотам

На рисунке 16 отсутствуют колебания по второй частоте, более того очевидно, что колебания не будут возникать на всех четных частотах, причиной чему является нулевые начальные условия для этих частот. Обратная картина наблюдается для крутильных колебаний – здесь отсутствуют колебания на нечетных частотах. Следовательно, при изучении изгибно-крутильных колебаний буровой колонны, вклад в общий колебательный процесс для поперечных колебаний вносят только нечетные моды, а для крутильных колебаний – только четные моды.

Таким образом, функции перемещений $u(z,t)$ и углов поворота $\theta(z,t)$ по методу Бубнова-Галеркина можно представить в виде:

$$u(z,t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin\left(\frac{(2i-1)\pi z}{l}\right), \quad (2.113)$$

$$\theta(z,t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) \cos\left(\frac{2i\pi z}{l}\right). \quad (2.114)$$

Данные представления позволяют проводить полный анализ поперечных и крутильных колебаний буровой колонны без затрат машинного времени на вычисление не возникающих гармоник, особенно когда учитывается большое количество мод.

Отметим, что успешное проведение буровых работ во многом зависит от правильного выбора параметров, влияющих на характер движения бурильной колонны. К таким параметрам относятся: длина буровой колонны, ее радиус и толщина стенок, жесткость, угловая скорость вращения, осевая сжимающая нагрузка и др.

Чтобы оценить влияние данных параметров на изгибно-крутильные перемещения точек сечения буровой штанги, была рассмотрена нелинейная модель (2.106)-(2.109) с функциями перемещений $u(z,t)$ и углов поворота $\theta(z,t)$ в четвертом приближении по методу Бубнова-Галеркина, определяемых из (2.113)-(2.114).

Для начала исследовались изгибно-крутильные колебания буровой колонны, моделируемой в виде вращающегося изотропного стержня симметричного поперечного сечения, при различных значениях длины штанги, а именно при $l = 250\text{ м}$ и $l = 500\text{ м}$.

Частоту вращения стержня принимали равной $\omega = 0.5 \text{ об/мин}$. В качестве материала использовалась сталь. Остальные параметры не изменялись. Сечение стержня рассматривалось вблизи его центра $z = 0.49l$ и у конца $z = 0.9l$.

Как можно увидеть из рисунков 18-19, амплитуды поперечных колебаний с увеличением длины бурильной колонны возрастают приблизительно в 2 раза вне зависимости от выбора сечения. Наибольшие амплитуды колебаний наблюдаются в центральном сечении колонны, а ближе к концу становятся значительно меньше. Стоит также отметить, что ближе к концу колонны колебания приобретают более скачкообразный характер.

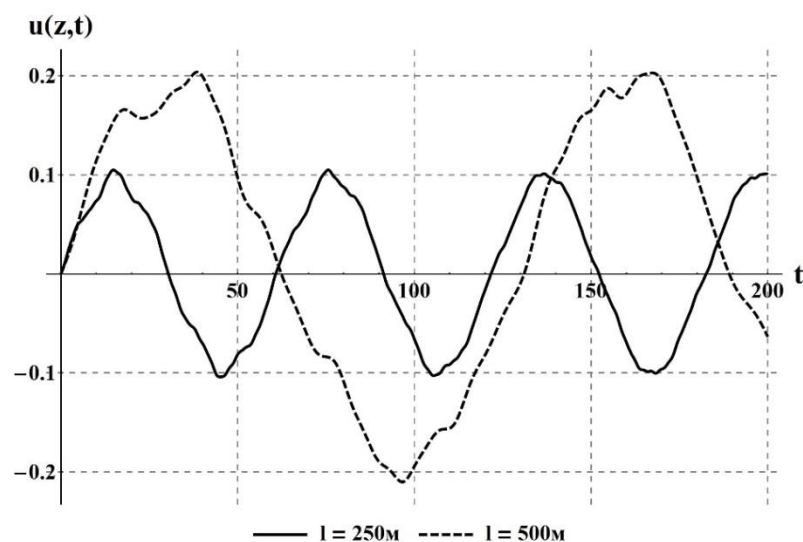


Рисунок 18 – Поперечные колебания буровых колонн различной длины в четвертом приближении, сечение $z = 0.49l$

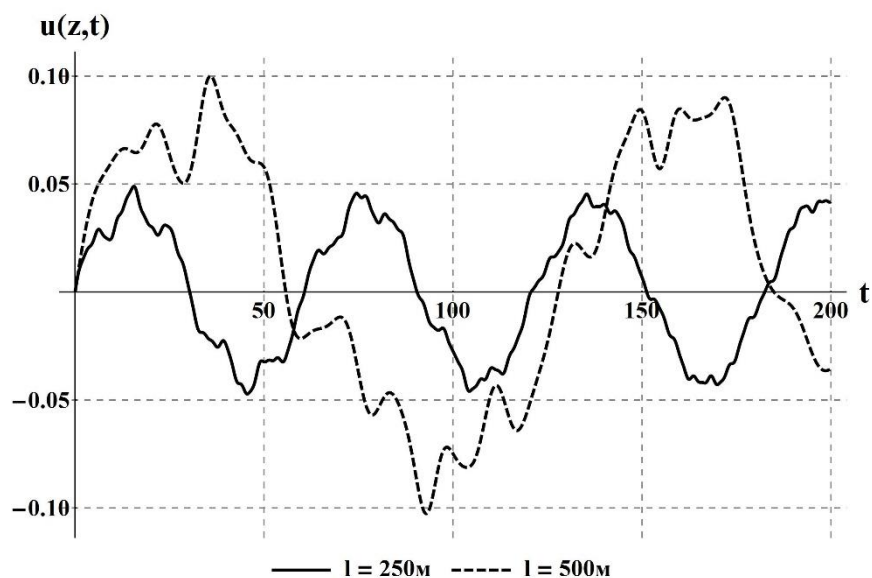


Рисунок 19 – Поперечные колебания буровых колонн различной длины в четвертом приближении, сечение $z = 0.9l$

Величины крутильных колебаний буровой колонны, при увеличении ее длины, так же остаются незначительно малыми (рисунки 20-21). Наибольшие значения амплитуды крутильных колебаний буровой колонны могут достигаться как в центральном сечении, так и в сечениях ближе к концам.

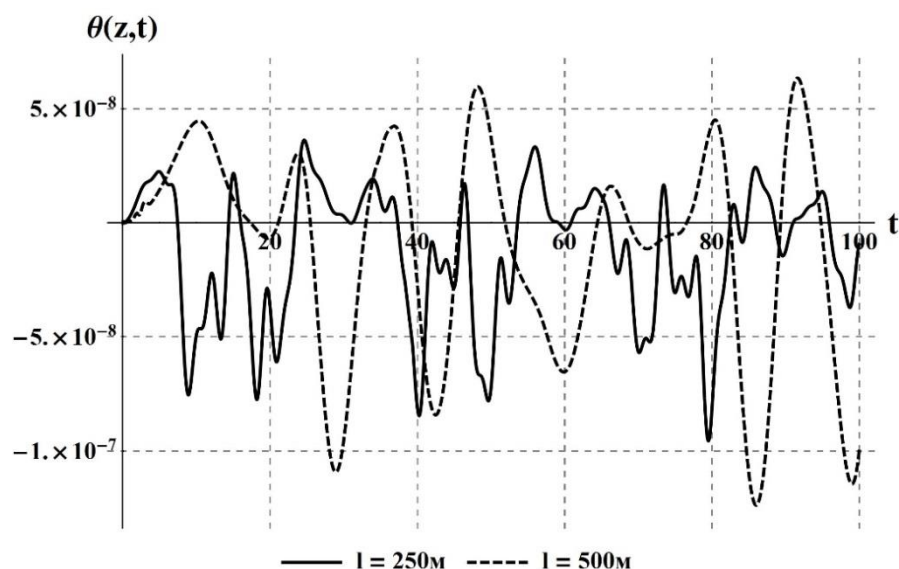


Рисунок 20 – Крутильные колебания буровых колонн различной длины в четвертом приближении, сечение $z = 0.49l$

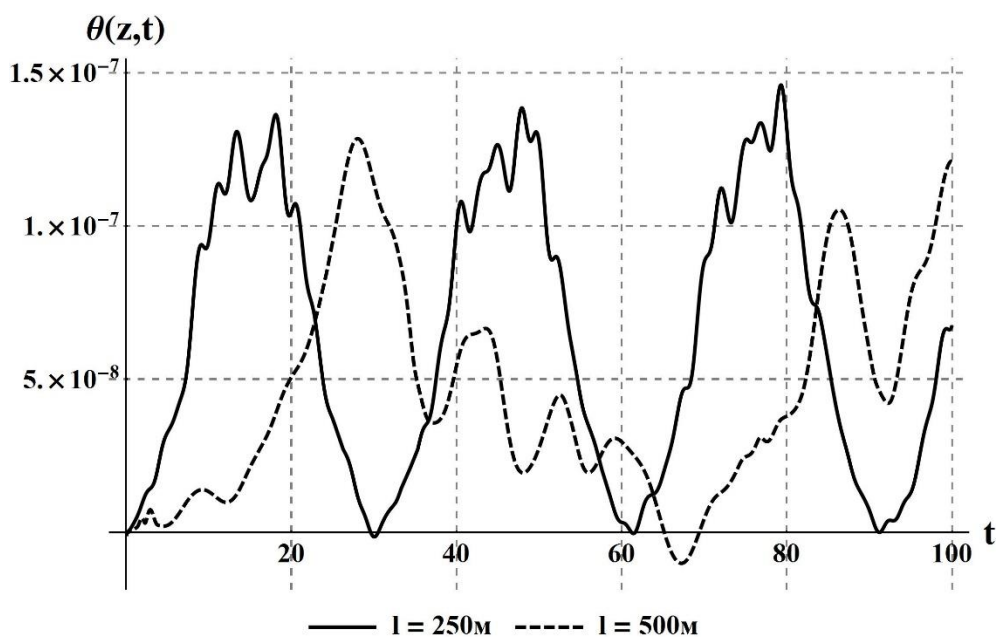


Рисунок 21 – Крутильные колебания буровых колонн различной длины в четвертом приближении, сечение $z = 0.9l$

На следующих рисунках представлено, как деформируется ось стальной буровой колонны длиной $l = 500\text{м}$ с частотой вращения $\omega = 0.5\text{ об/мин}$ при действии на нее осевой сжимающей нагрузки $T = 2.2 \times 10^3\text{ Н}$.

На рисунке 22 показаны поперечный изгиб стержня в плоскости Oxz , на рисунке 23 углы поворота сечений упругой линии стержня вдоль оси z в результате крутильных колебаний.

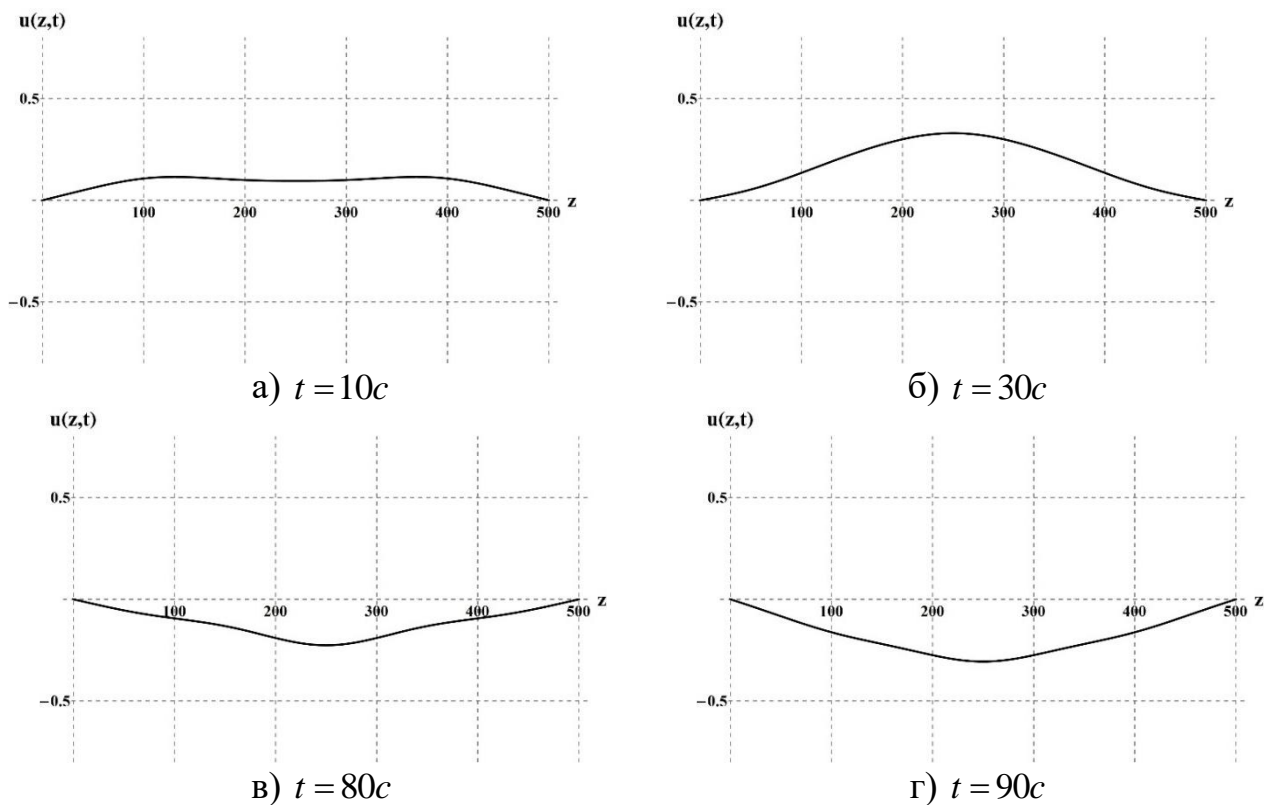


Рисунок 22 – Динамика упругого деформирования оси буровой колонны в плоскости Oyz

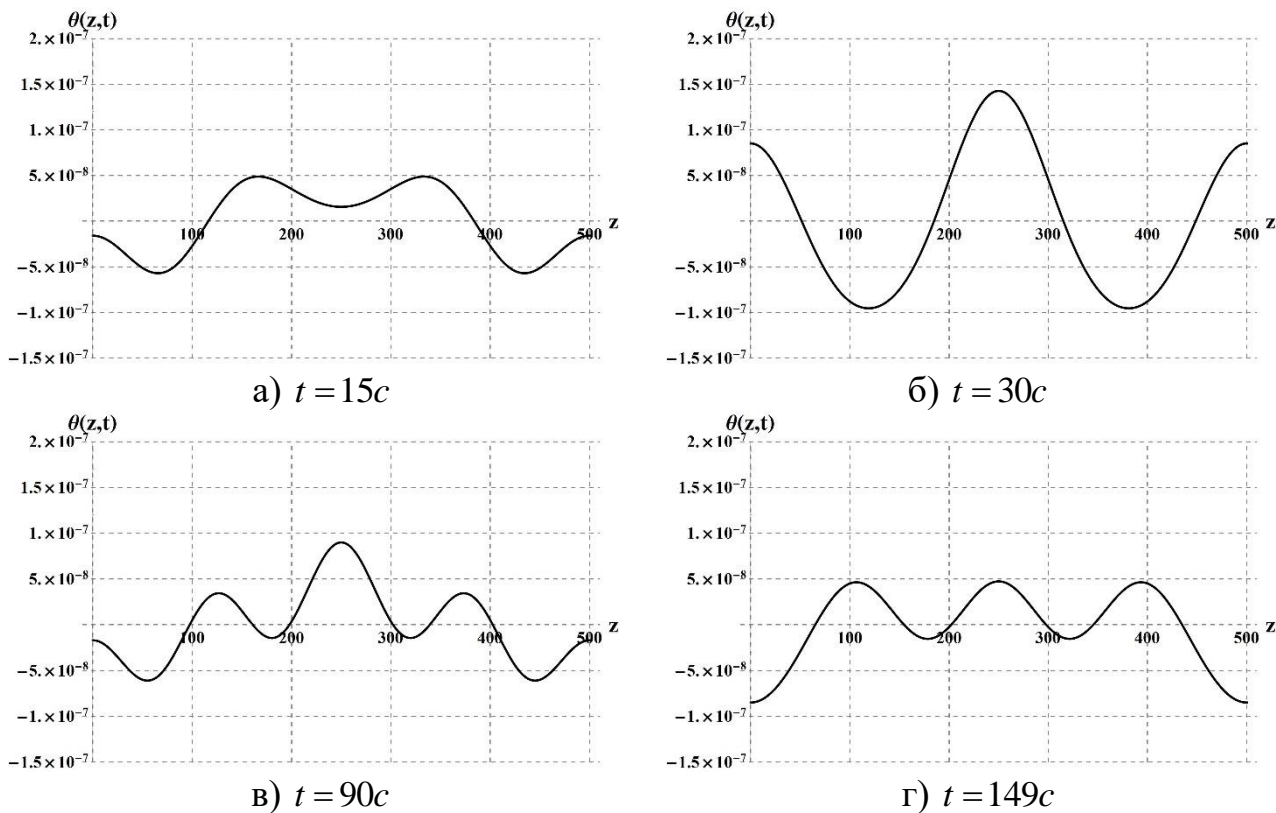


Рисунок 23 – Динамика углов поворота сечений упругой оси буровой колонны вдоль оси z

Как показывает рисунок 22, с течением времени ось стержня принимает различные формы изгиба с наибольшими отклонениями от недеформированного положения в центральном сечении. Для крутильных колебаний на рисунке 23, описывающих поворот угла поперечного сечения колонны, наблюдается периодический процесс роста и уменьшения амплитуд углов поворота по всей длине буровой колонны с течением времени.

Далее рассмотрено влияния частоты вращения ω буровой колонны на возникающие изгибно-крутильные колебания. Для этого рассматривалась буровая колонна длиной $l = 200\text{ м}$ с частотой вращения:

- 1) $\omega = 15\text{ об/мин}$,
- 2) $\omega = 30\text{ об/мин}$.

Величина продольной сжимающей нагрузки T и остальные параметры системы принимались прежними: $T = 2.2 \times 10^3\text{ Н}$, $E = 2.1 \times 10^5\text{ МПа}$, $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\nu = 0.28$ (для стальных буровых штанг), $D = 0.2\text{ м}$, $d = 0.12\text{ м}$, $A \approx 2.01 \times 10^{-2}\text{ м}^2$, $I_y \approx 6.84 \times 10^{-5}\text{ м}^4$.

Как видно из рисунков 24-25, возрастание частоты вращения буровой колонны также приводит к увеличению амплитуды ее поперечных и крутильных колебаний. Причем, если для поперечных колебаний двукратное увеличение частоты вращения ω вызывает двукратное увеличение амплитуды колебаний (рисунок 24), то и для крутильных колебаний изменение данной характеристики с $\omega = 15\text{ об/мин}$ до $\omega = 30\text{ об/мин}$ влечет возрастание амплитуды колебаний в 2 раза (рисунок 25).

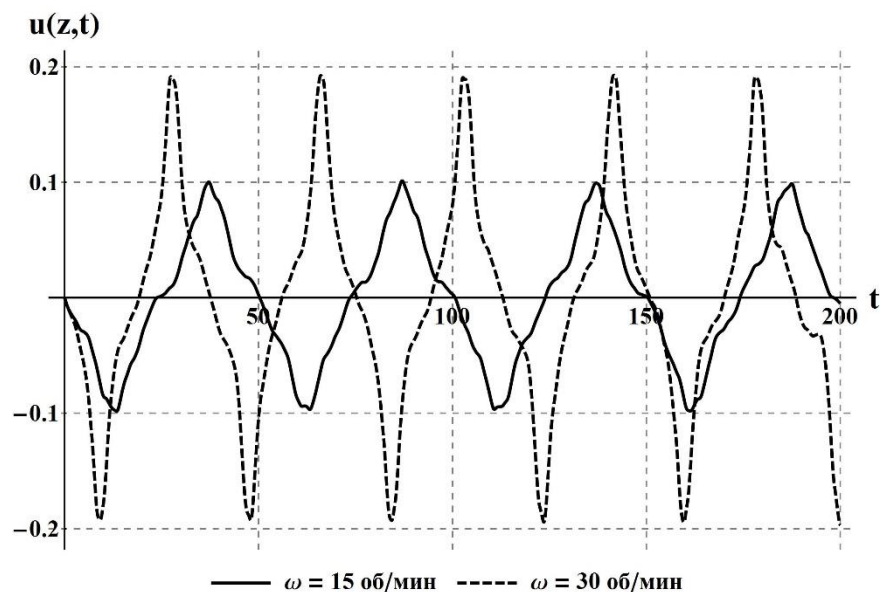


Рисунок 24 – Поперечные колебания буровой колонны ($l = 200\text{ м}$) при изменении частоты вращения

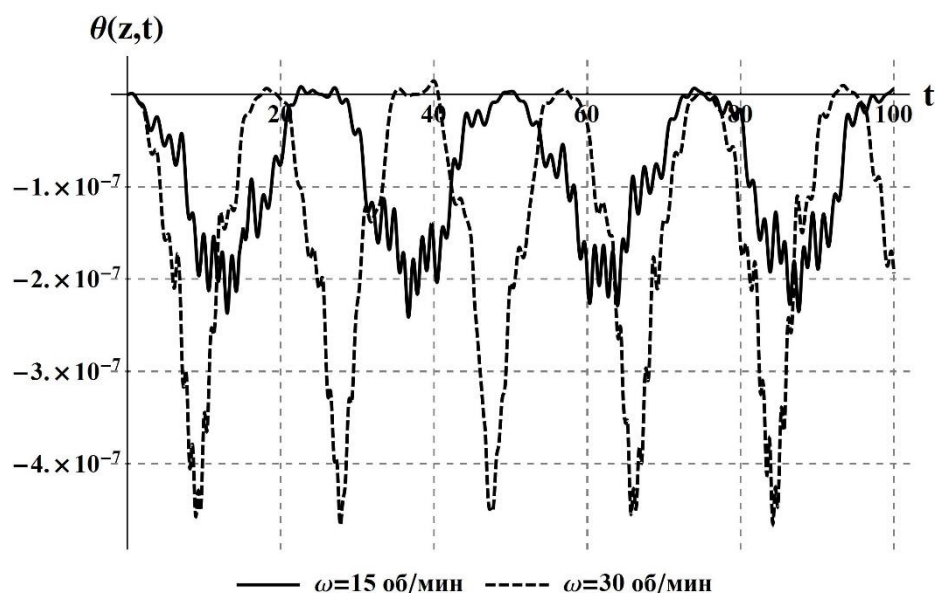


Рисунок 25 – Крутильные колебания буровой колонны ($l = 200\text{м}$) при изменении частоты вращения

Ранее рассматривались буровые колонны с внешним диаметром $D = 0.2\text{м}$ и внутренним диаметром $d = 0.12\text{м}$, поэтому далее было исследовано влияние уменьшения внешнего диаметра буровой штанги на ее изгибно-крутильные колебания.

Как отмечалось ранее в первом подразделе данного раздела, чем больше толщина стенок буровой колонны, тем она прочнее и обеспечивает более надежную проходку скважины. Однако, если при уменьшении толщины стенок, колебания все еще находятся в пределах, при которых процесс бурения осуществляется без угрозы обрушения скважины, либо поломки буровой колонны, то это может привести к значительной экономии средств, затрачиваемых на изготовление буровых штанг.

Для сравнения были рассмотрены буровые колонны с внешними диаметрами $D = 0.168\text{м}$ и $D = 0.14\text{м}$ (значения взяты из [1]).

Как можно увидеть из рисунков 26-27, уменьшение внешнего диаметра буровой колонны с $D = 0.2\text{м}$ до $D = 0.168\text{м}$, а, следовательно, и толщины стенок колонны, приводит лишь к незначительному увеличению амплитуды изгибно-крутильных колебаний. Дальнейшее уменьшение внешнего диаметра до $D = 0.14\text{м}$ вызывает более сильное возмущение колебаний, которое, однако, не является критическим. Таким образом, мы можем сократить количество материала, требуемого на изготовление буровой колонны, сохраняя при этом устойчивость всей системы.

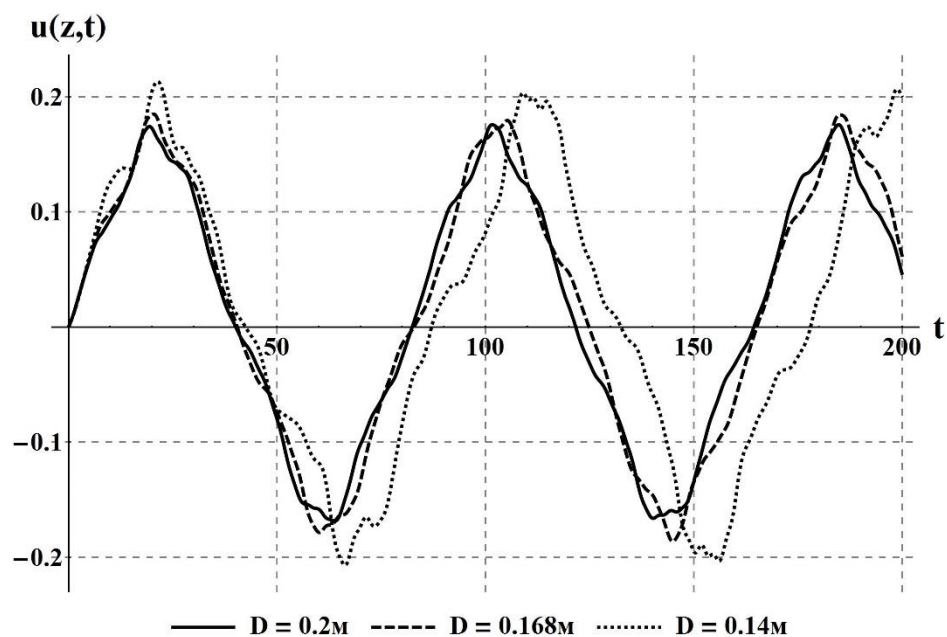


Рисунок 26 – Влияние выбора толщины стенок буровой колонны на ее поперечные колебания при длине $l = 300\text{ м}$ и частоте вращения $\omega = 5\text{ об/мин}$

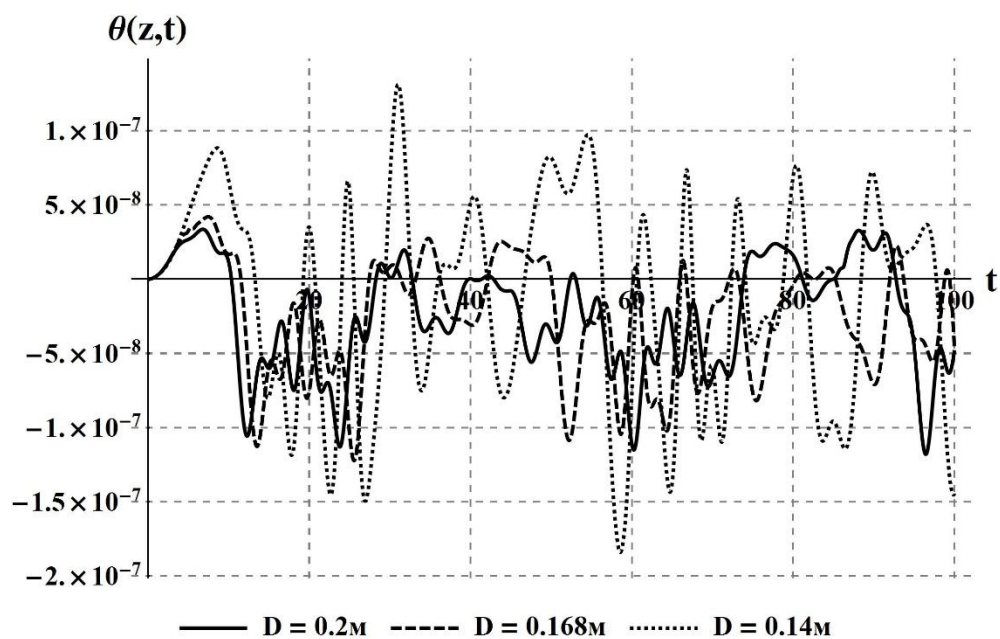


Рисунок 27– Влияние выбора толщины стенок буровой колонны на ее крутильные колебания при длине $l = 300\text{ м}$ и частоте вращения $\omega = 5\text{ об/мин}$

Далее было рассмотрено влияние значения осевой сжимающей нагрузки T , действующей на колонну, на рассматриваемый класс колебаний.

Диаметр буровой колонны принимался равным $D = 0.168\text{ м}$, исходя из построенных выше графиков.

Рисунки 28-29 показывают влияние внешних сжимающих нагрузок $T = 2.2 \times 10^3 \text{ Н}$ и $T = 2.2 \times 10^4 \text{ Н}$ на изгибно-крутильные движения колонны. Рассматривалась колонна длиной $l = 100 \text{ м}$, $\omega = 40 \text{ об/мин}$. Значения остальных параметров приведены ранее.

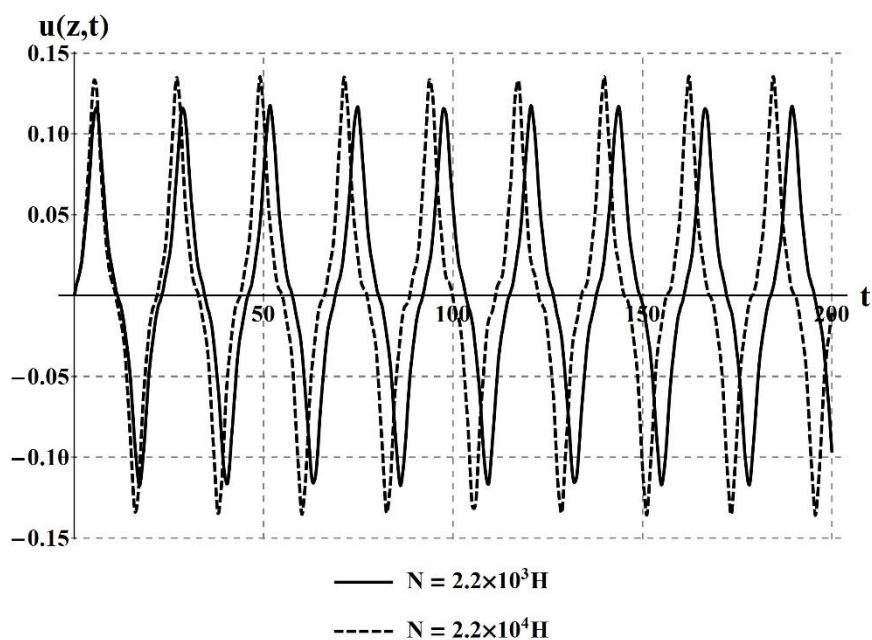


Рисунок 28 – Поперечные колебания буровой колонны ($l = 100 \text{ м}$, $\omega = 40 \text{ об/мин}$) при изменении внешней сжимающей нагрузки

На рисунках 28-29 можно наблюдать уже закономерное изменение амплитуд колебательных движений с увеличением определенного параметра буровой колонны или, как в данном случае, внешней осевой нагрузки. Здесь десятикратное увеличение нагрузки дает лишь сравнительно небольшой рост поперечных колебаний от величин колебаний при нагрузке $T = 2.2 \times 10^3 \text{ Н}$ (рисунок 28). Касательно крутильных колебаний можно заключить, что, несмотря на увеличение их значений при действии нагрузки $T = 2.2 \times 10^4 \text{ Н}$, они по-прежнему остаются на несколько порядков меньше поперечных колебаний.

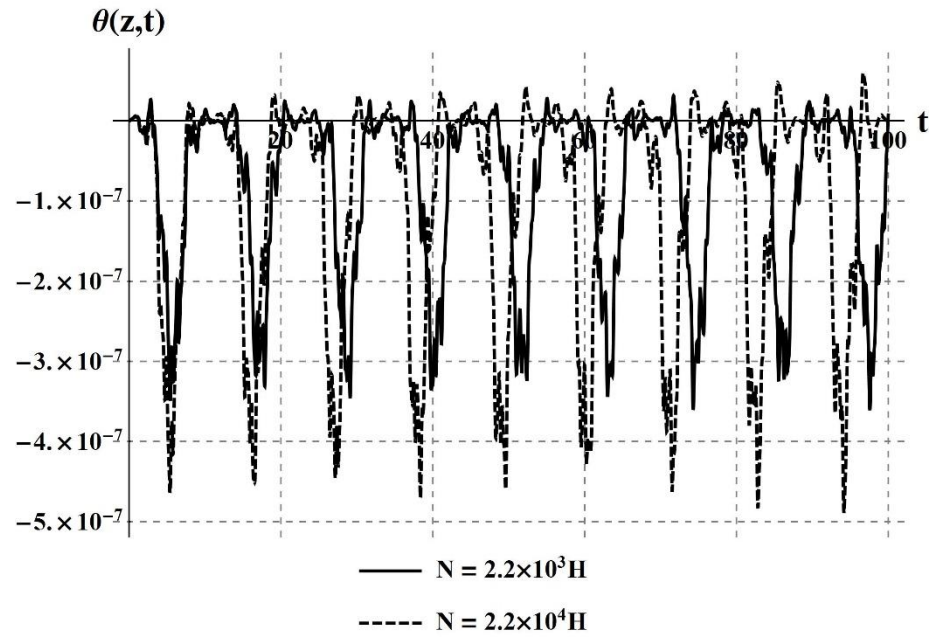


Рисунок 29 – Крутильные колебания буровой колонны ($l = 100 \text{ м}$, $\omega = 40 \text{ об/мин}$) при изменении внешней сжимающей нагрузки

2.6.2 Анализ пространственных колебаний буровой штанги

В этом подразделе рассмотрена сама нелинейная математическая модель (2.104), описывающая пространственные изгибно-крутильные колебания буровой колонны, представленной в виде изотропного упругого стержня длиной l , с учетом вращения с частотой ω и действия продольной сжимающей нагрузки $T(z,t)$ и крутящего момента $M_z(t)$, со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 u(z,t) = v(z,t) = 0 \quad (z = 0, z = l), \\
 EI_y \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = EI_x \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = 0 \quad (z = 0, z = l), \\
 \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, z = l),
 \end{aligned} \tag{2.115}$$

и начальными условиями следующего вида:

$$\begin{aligned}
 u(z,t)|_{t=0} = v(z,t)|_{t=0} = \theta(z,t)|_{t=0} = 0, \\
 \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = C_1, \quad \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = C_2, \quad \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

где $u(z,t)$ – поперечное перемещение частиц срединной линии стержня в плоскости Oxz ; $v(z,t)$ – поперечное перемещение частиц срединной линии

стержня в плоскости Oyz ; $\theta(z,t)$ – угол поворота его поперечного сечения; C_1 , C_2 - постоянные.

Для получения решения модели (2.104), (2.115) и (2.116), так же как и ранее, был применен метод Бубнова-Галеркина. Сжимающую нагрузку и крутящий момент принимаем постоянными, т.е. $T(z,t) = T$ и $M_z(t) = M_z$.

В соответствии с методом Бубнова-Галеркина, поперечные перемещения $u(z,t)$, $v(z,t)$ в плоскости Oxz и угол поворота $\theta(z,t)$ были представлены в виде рядов:

$$u(z,t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \quad (2.117)$$

$$v(z,t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \quad (2.118)$$

$$\theta(z,t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) \cos\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \quad (2.119)$$

соответственно.

Базисные функции $\sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right)$ и $\cos\left(\frac{i\pi z}{l}\right)$ выбраны таким образом, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (2.115).

Для получения численного решения полученной системы уравнений так же применен метод с переключением жесткости (Stiffness switching method), подробно о котором уже было рассказано ранее.

При численных расчетах использовались следующие значения параметров буровой колонны: модуль Юнга $E = 2.1 \times 10^5 \text{ МПа}$, плотность материала $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.28$ (для стальных буровых штанг), внешний диаметр штанги $D = 0.2 \text{ м}$, внутренний диаметр $d = 0.12 \text{ м}$, площадь поперечного сечения штанги

$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \approx 2.01 \times 10^{-2} \text{ м}^2,$$

осевой момент инерции

$$I_y = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \approx 6.84 \times 10^{-5} \text{ м}^4,$$

полярный момент инерции $I_p = 2I_y$, длина буровой колонны $l = 500\text{ м}$, частота вращения $\omega = 5\text{ об/мин}$, продольная сжимающая нагрузка $T = 2.2 \times 10^3\text{ Н}$.

Как и в случае с плоскими колебаниями, можно показать, что для составляющих поперечных перемещений $u(z, t)$ и $v(z, t)$ будут отсутствовать колебания на четных частотах, а для углов поворота $\theta(z, t)$ – на нечётных частотах. Поэтому имеет смысл сразу принять представление составляющих перемещений и углов поворота сечений упругой линии буровой колонны по методу Бубнова-Галеркина в следующем виде:

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin\left(\frac{(2i-1)\pi z}{l}\right), \quad (2.120)$$

$$v(z, t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) \sin\left(\frac{(2i-1)\pi z}{l}\right), \quad (2.121)$$

$$\theta(z, t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) \cos\left(\frac{2i\pi z}{l}\right). \quad (2.122)$$

Что, как ранее отмечалось, позволяет проводить полный анализ поперечных и крутильных колебаний буровой колонны без затрат машинного времени на вычисление не возникающих гармоник, особенно когда учитывается большое количество мод.

На рисунках 30-31 показаны поперечные и крутильные колебания буровой колонны с функциями перемещений $u(z, t)$, $v(z, t)$ и $\theta(z, t)$, взятых в первых четырех приближениях по методу Бубнова-Галеркина, при заданных параметрах механической системы.

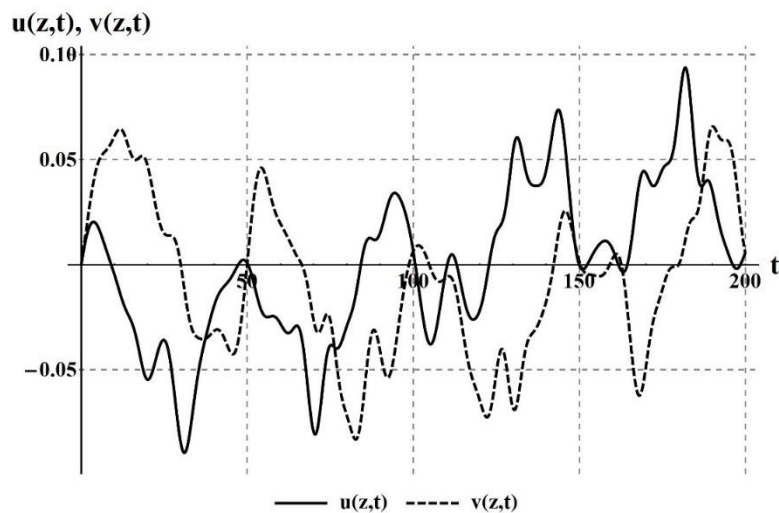


Рисунок 30 – Поперечные колебания буровой колонны по первым четырём частотам

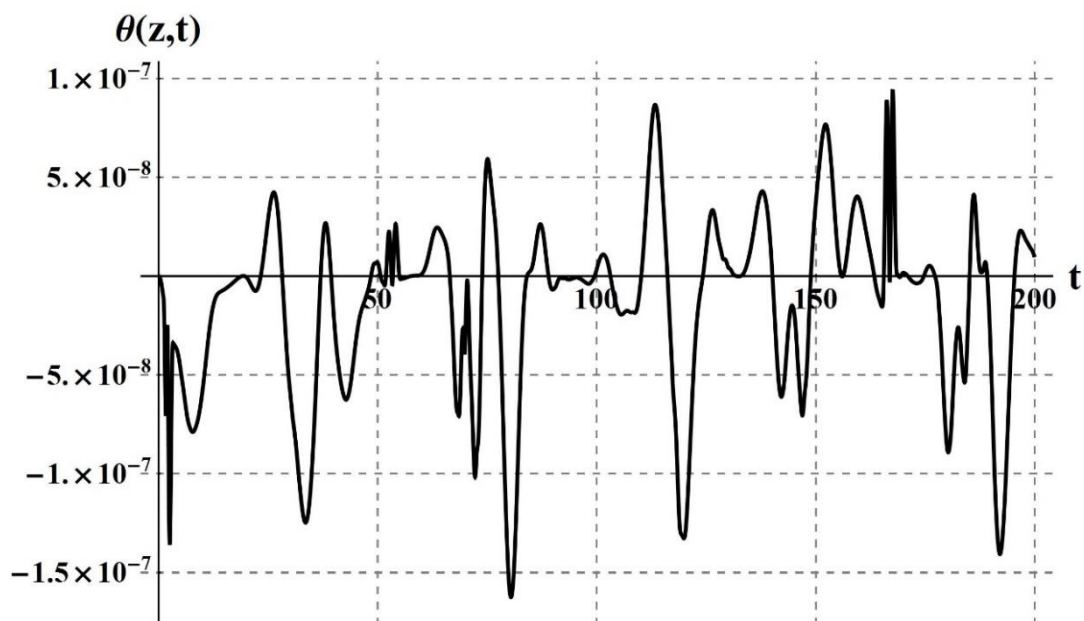


Рисунок 31 – Крутильные колебания буровой колонны по первым четырём частотам

Полученные графики так же и в плоском случае показывают, что амплитуда поперечных колебаний на несколько порядков превосходит амплитуду крутильных колебаний.

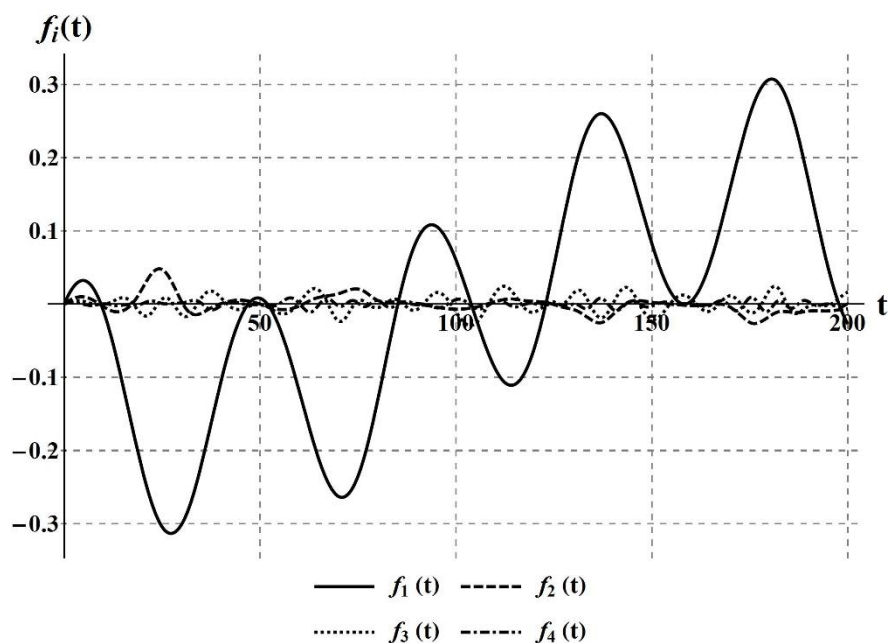


Рисунок 32 – Амплитуды поперечных колебаний $u(z,t)$ буровой колонны по первым четырём частотам

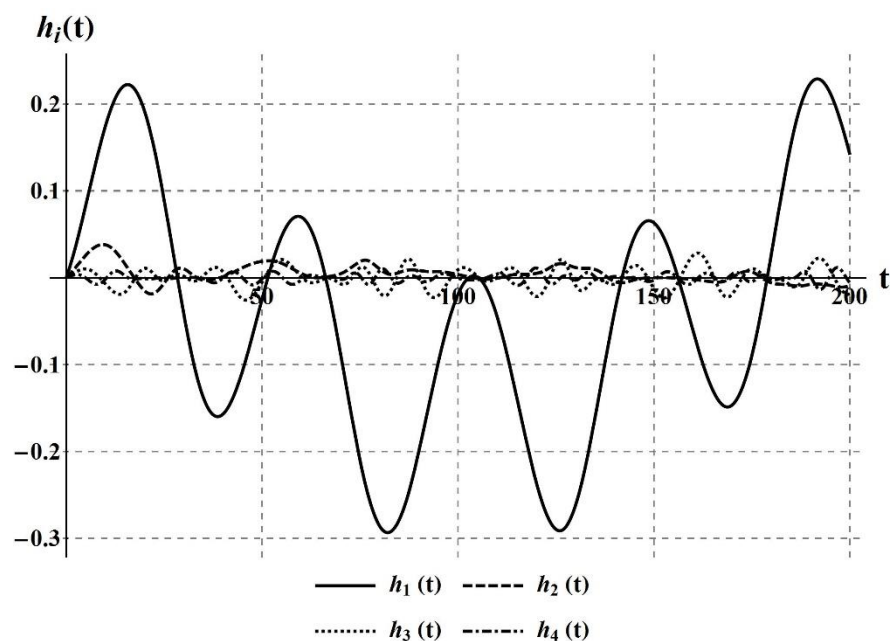


Рисунок 33 – Амплитуды поперечных колебаний $v(z,t)$ буровой колонны по первым четырём частотам

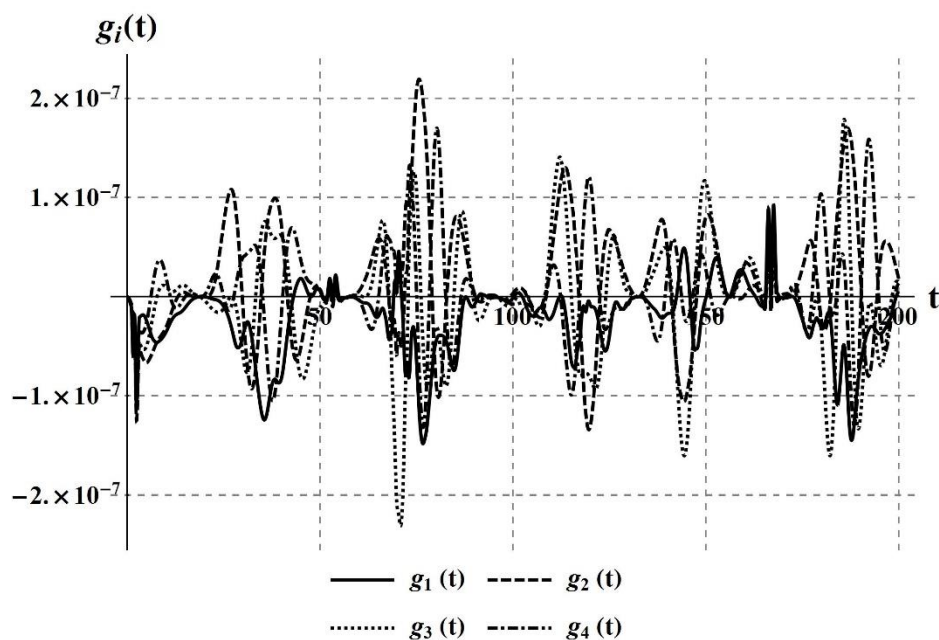


Рисунок 34 – Амплитуды крутильных колебаний буровой колонны по первым трем частотам

Здесь, как и в случае с плоскими колебаниями, было исследовано влияние длины буровой колонны, ее радиуса, толщины стенок, жесткости, частоты вращения и осевой сжимающей нагрузки на изгибно-крутильные колебания бурильной колонны.

Чтобы оценить влияние данных параметров на изгибно-крутильные перемещения точек сечения буровой штанги, была рассмотрена нелинейная

модель (2.104), (2.115) и (2.116) с функциями перемещений $u(z,t)$, $v(z,t)$ и углов поворота $\theta(z,t)$ в четвертом приближении по методу Бубнова-Галеркина, определяемых из (2.120)-(2.122).

На рисунках 35-40 представлены изгибно-крутильные колебания буровой колонны для разных длин штанги, а именно при $l = 250\text{м}$ и $l = 500\text{м}$. При этом частота вращения стержня принималась равной $\omega = 5\text{ об/мин}$, в качестве материала использовали сталь. Остальные параметры не изменялись. Сечение стержня рассматривалось вблизи его центра $z = 0.49l$ и у конца $z = 0.9l$.

Как и ранее для плоского случая, из рисунков можно заметить, что амплитуда составляющих поперечного колебания с уменьшением длины штанги уменьшилась в два раза, в то время как амплитуда крутильных колебаний наоборот увеличилась.

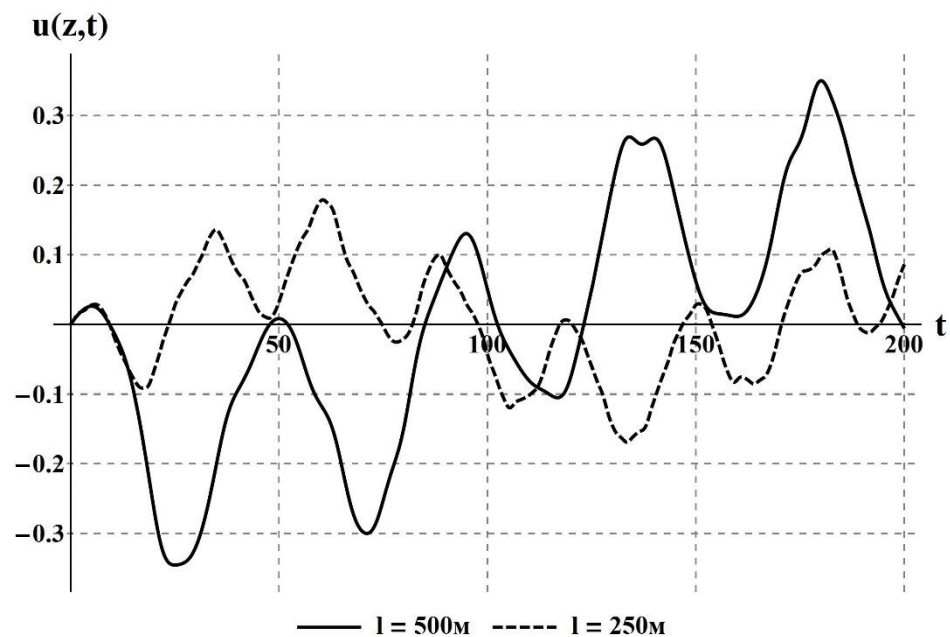


Рисунок 35 – Поперечные колебания $u(z,t)$ буровых колонн различной длины в четвертом приближении, сечение $z = 0.49l$

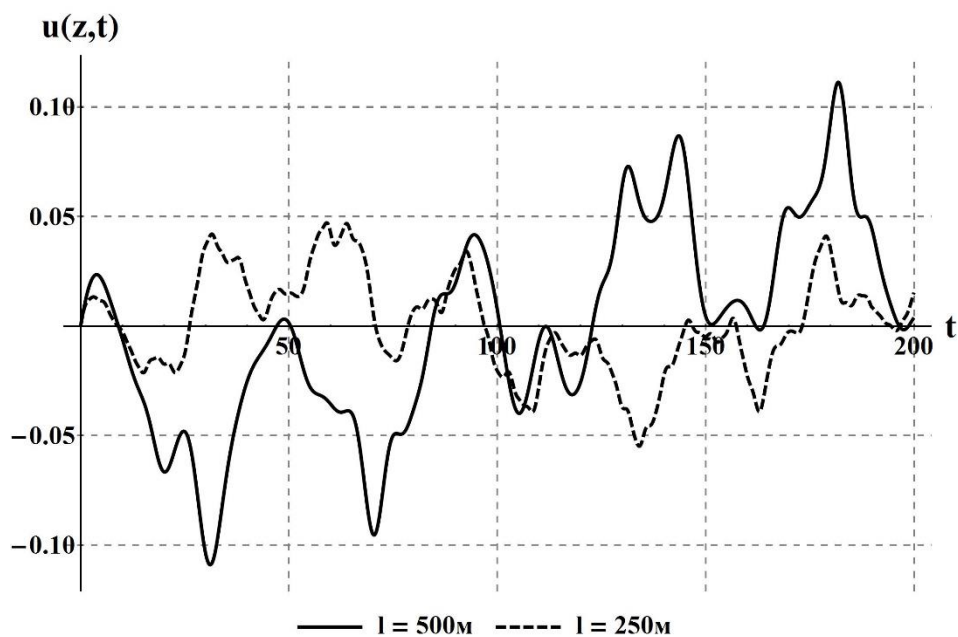


Рисунок 36 – Поперечные колебания $u(z,t)$ буровых колонн различной длины в четвертом приближении, сечение $z = 0.9l$

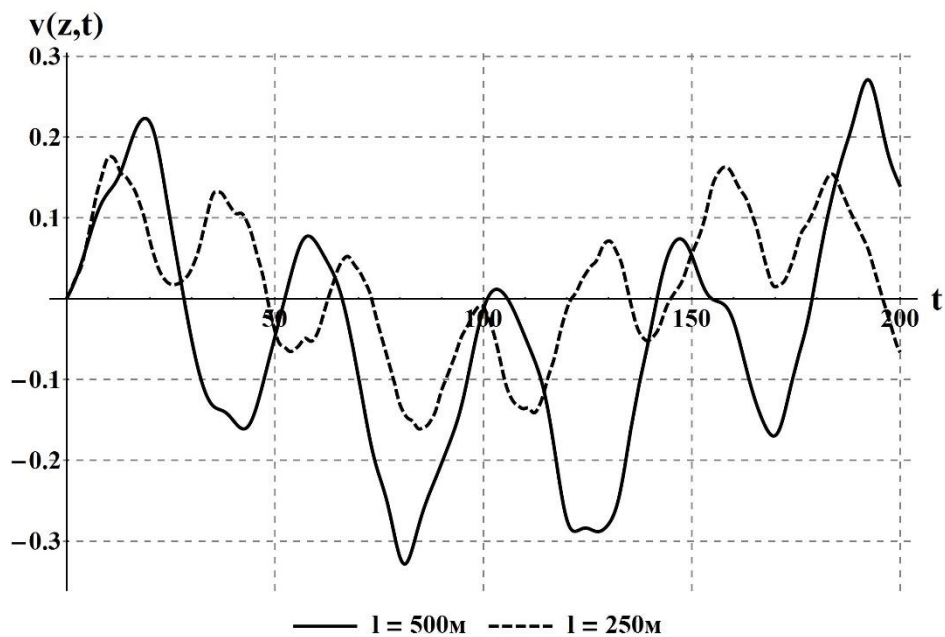


Рисунок 37 – Поперечные колебания $v(z,t)$ буровых колонн различной длины в четвертом приближении, сечение $z = 0.49l$

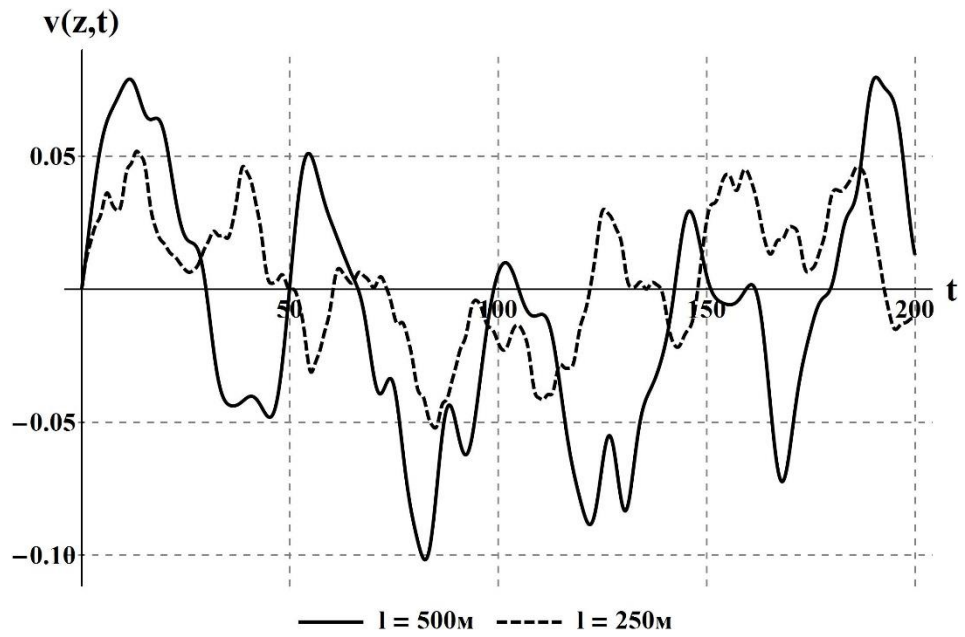


Рисунок 38 – Поперечные колебания $v(z,t)$ буровых колонн различной длины в четвертом приближении, сечение $z = 0.9l$

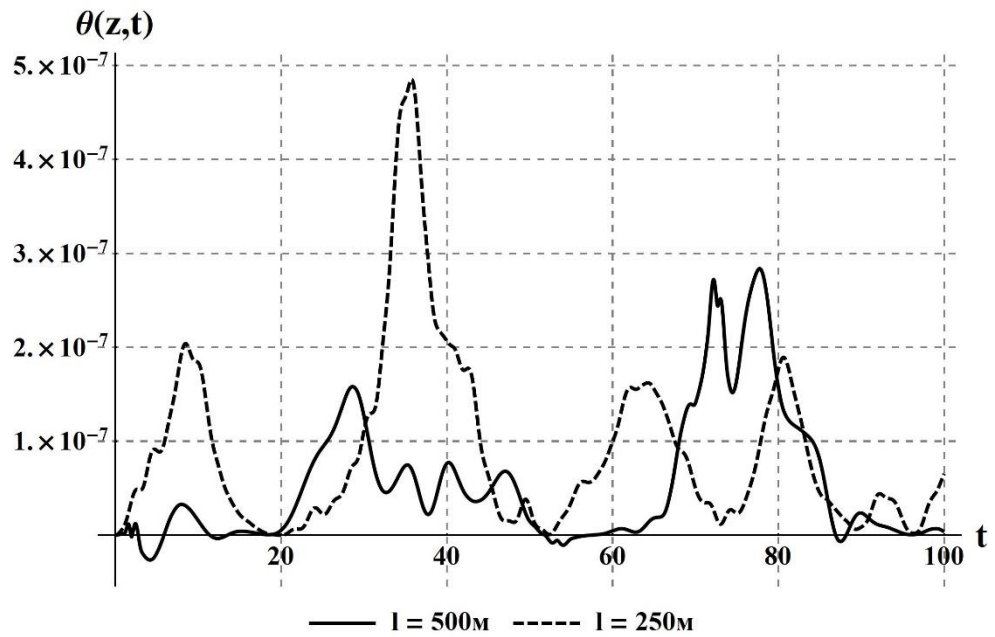


Рисунок 39 – Крутильные колебания $\theta(z,t)$ буровых колонн различной длины в четвертом приближении, сечение $z = 0.49l$

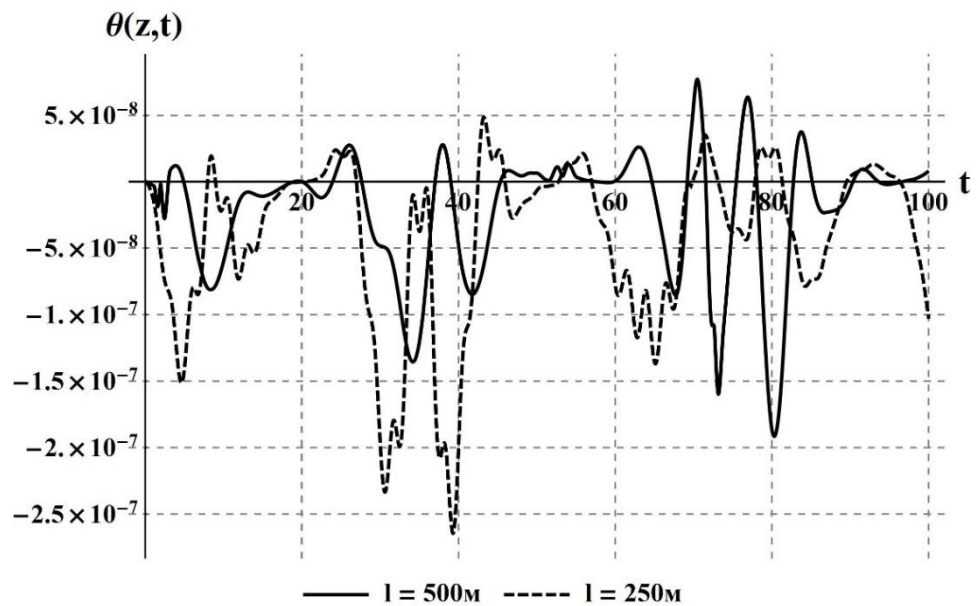


Рисунок 40 – Крутильные колебания $\theta(z,t)$ буровых колонн различной длины в четвертом приближении, сечение $z = 0.9l$

На рисунке 41 показаны с помощью параметрической 3D визуализации результирующий поперечный изгиб буровой колонны вдоль всей длины, при этом на рисунках ось z масштабируется для удобства отображения результатов. На рисунке 42 представлены углы поворота сечений упругой линии колонны вдоль оси z в результате крутильных колебаний.

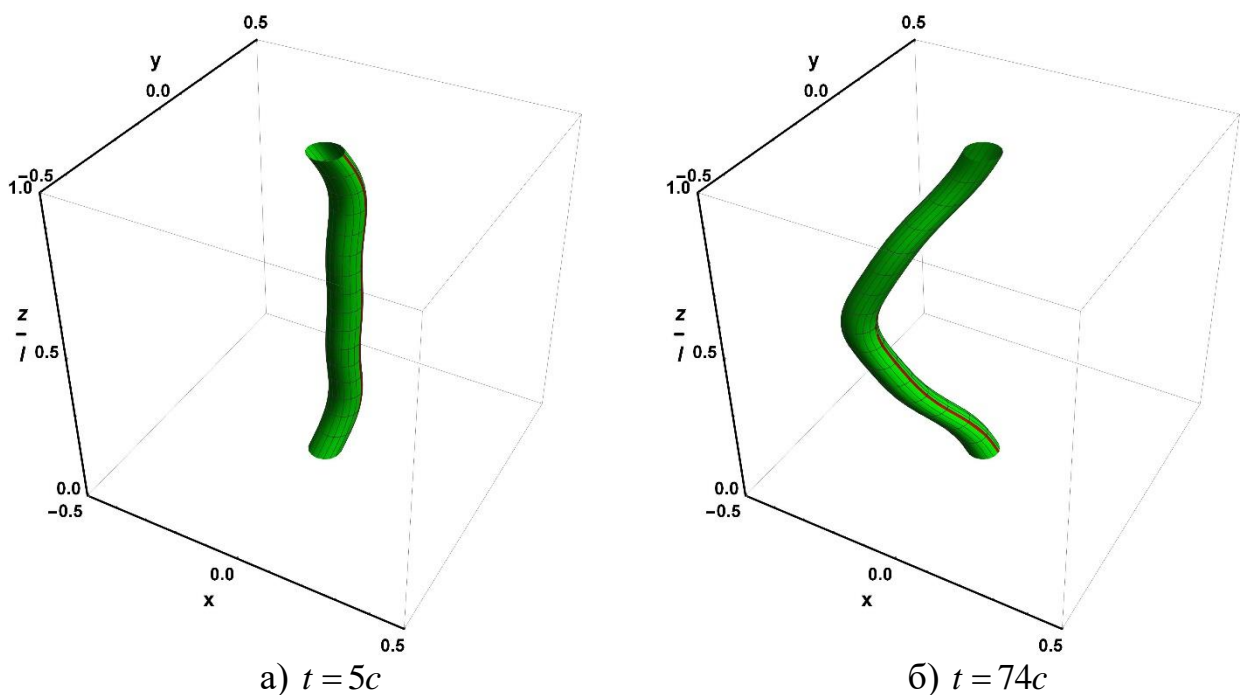
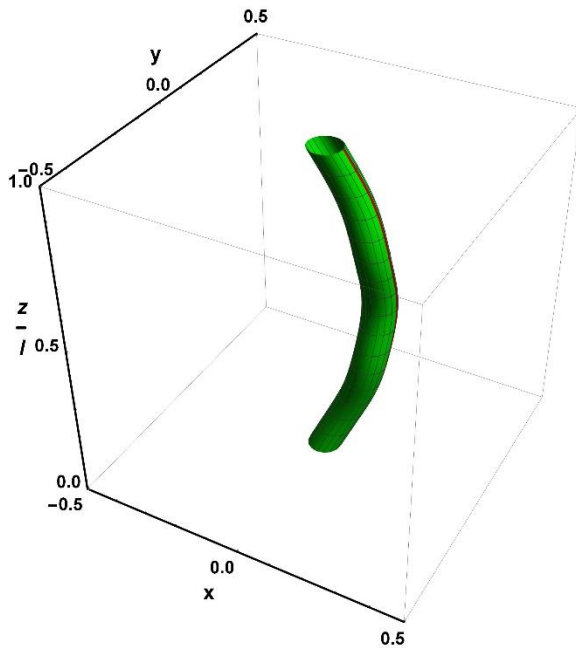
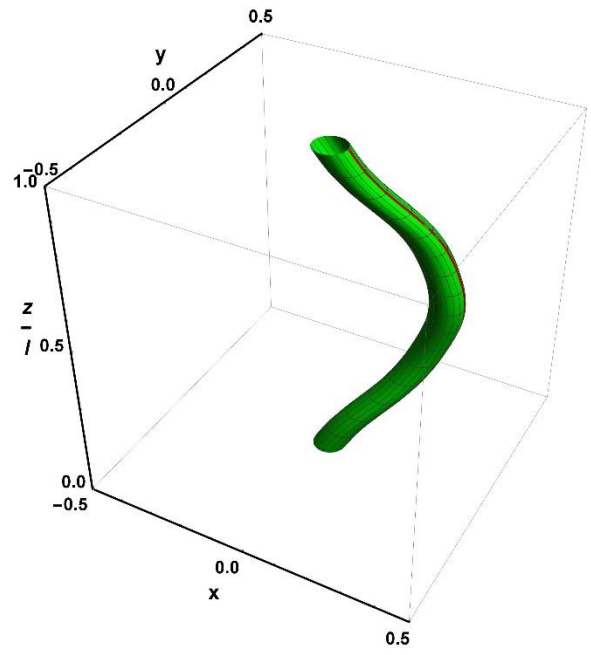


Рисунок 41 – Динамика упругого деформирования оси буровой колонны в плоскости Oyz , лист 1

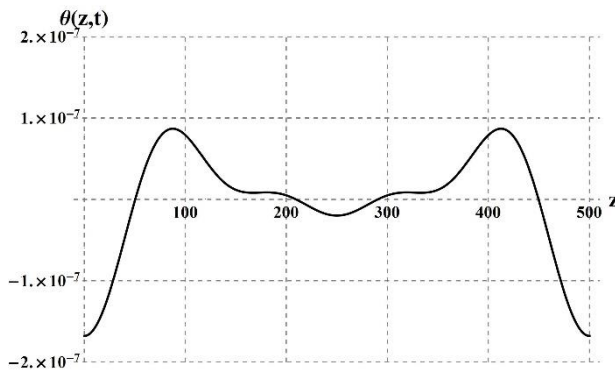


в) $t = 147c$

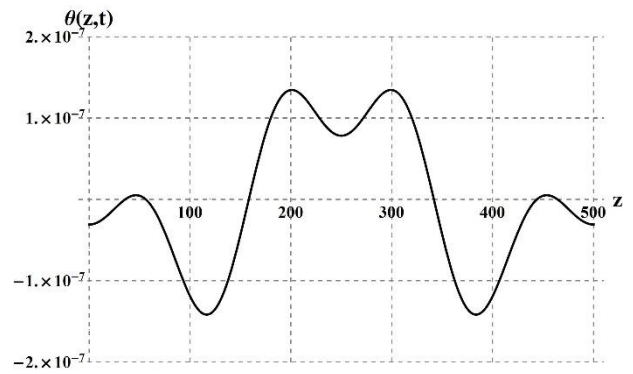


г) $t = 185c$

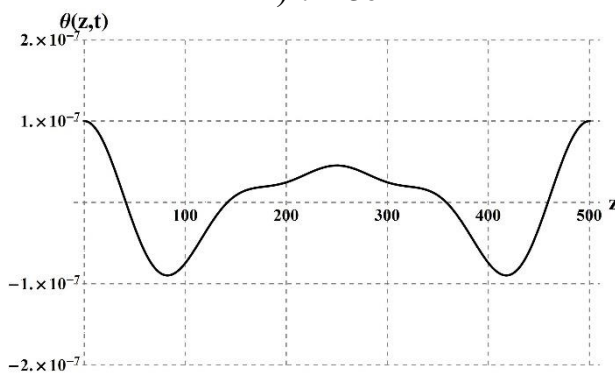
Рисунок 41, лист 2



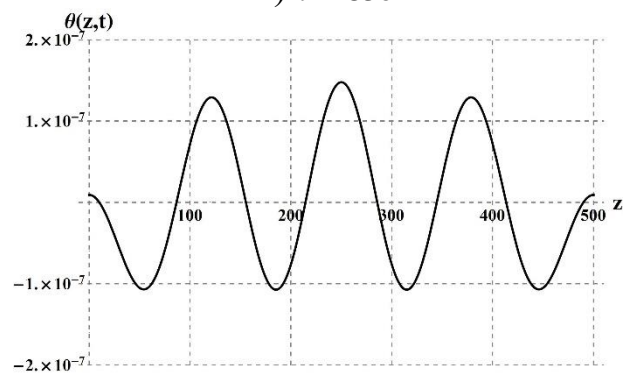
а) $t = 5c$



б) $t = 85c$



в) $t = 140c$



г) $t = 180c$

Рисунок 42 – Динамика углов поворота сечений упругой оси буровой колонны вдоль оси z

Как показывает рисунок 41, с течением времени ось стержня принимает различные формы изгиба с наибольшими отклонениями от недеформированного положения в центральном сечении. Для крутильных колебаний на рисунке 42, описывающих поворот угла поперечного сечения колонны, наблюдается периодический процесс роста и уменьшения амплитуд углов поворота по всей длине буровой колонны с течением времени.

На рисунках 43-45 показано влияние частоты вращения ω буровой колонны на возникающие изгибно-крутильные колебания. Для этого рассматривалась буровая колонна длиной $l = 200\text{ м}$ с частотой вращения:

- 1) $\omega = 15\text{ об/мин}$,
- 2) $\omega = 30\text{ об/мин}$.

Величина продольной сжимающей нагрузки N и остальные параметры системы принимались прежними: $T = 2.2 \times 10^3\text{ Н}$, $E = 2.1 \times 10^5\text{ МПа}$, $\rho = 7800\text{ кг/м}^3$, $\nu = 0.28$ (для стальных буровых штанг), $D = 0.2\text{ м}$, $d = 0.12\text{ м}$, $A \approx 2.01 \times 10^{-2}\text{ м}^2$, $I_y \approx 6.84 \times 10^{-5}\text{ м}^4$.

В отличие от плоского случая увеличение частоты вращения с $\omega = 15\text{ об/мин}$ до $\omega = 30\text{ об/мин}$ не влечет за собой возрастание амплитуды колебаний в пространственном случае, но тем не менее увеличивает частотную характеристику колебательного процесса.

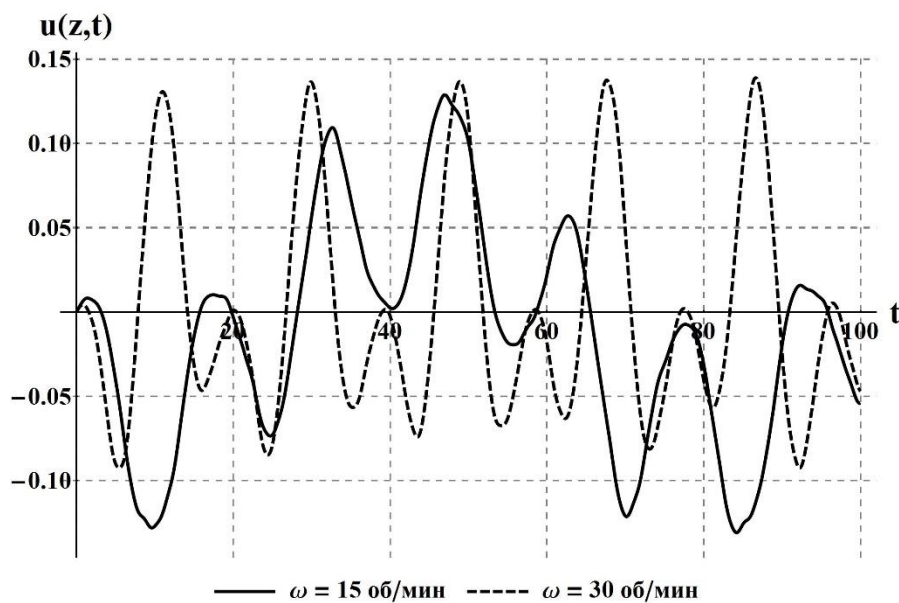


Рисунок 43 – Поперечные колебания $u(z,t)$ буровой колонны ($l = 200\text{ м}$) при изменении частоты вращения

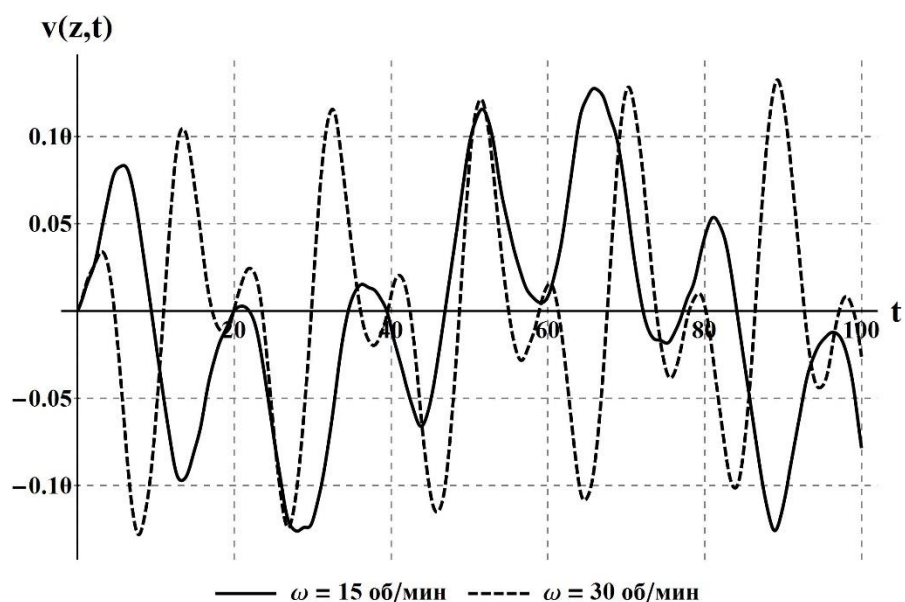


Рисунок 44 – Поперечные колебания $v(z,t)$ буровой колонны ($l = 200m$) при изменении частоты вращения

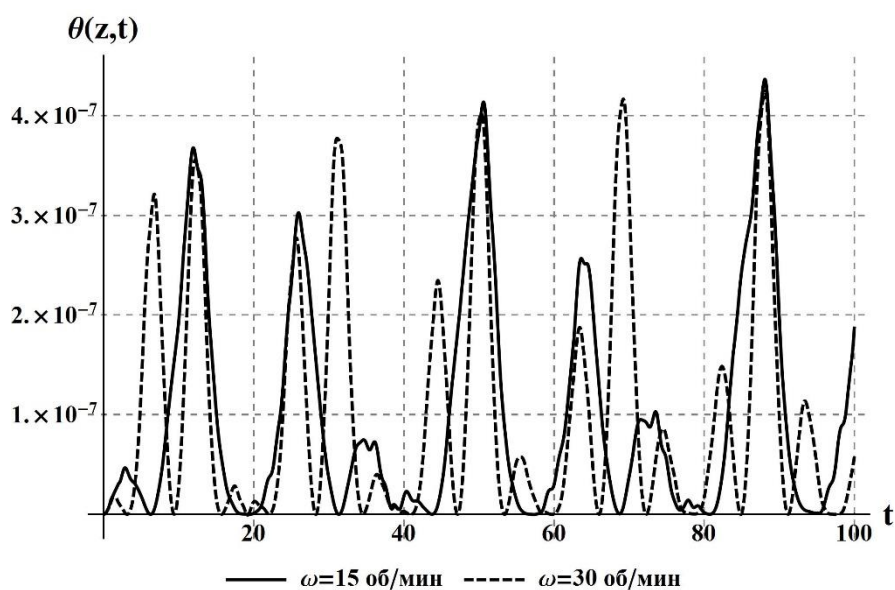


Рисунок 45 – Крутильные колебания буровой колонны ($l = 200m$) при изменении частоты вращения

На рисунках 46-48 представлено влияние уменьшения внешнего диаметра буровой штанги на ее изгибно-крутильные колебания. Для сравнения были рассмотрены буровые колонны с внешними диаметрами $D = 0.168m$ и $D = 0.14m$ (значения взяты из [1]).

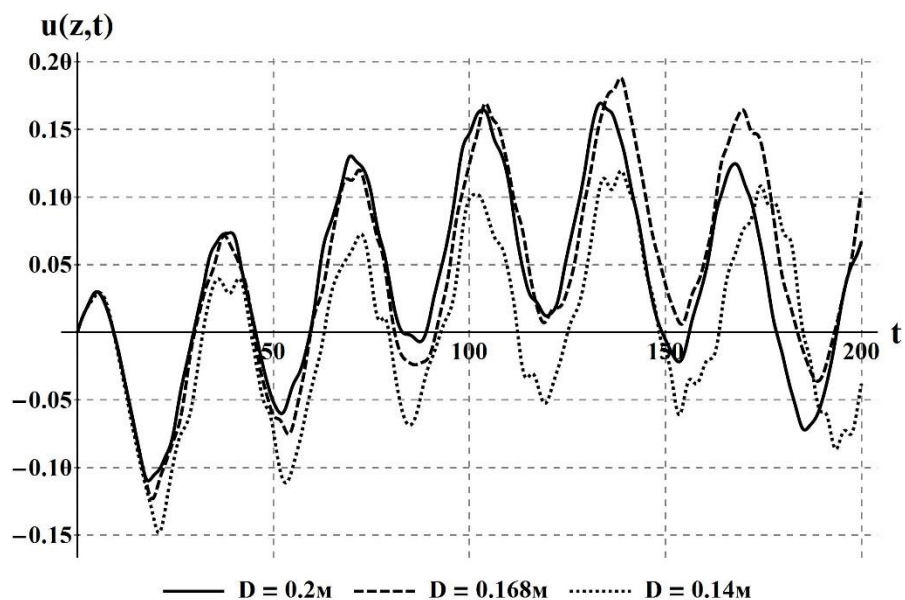


Рисунок 46 – Влияние выбора толщины стенок буровой колонны на ее поперечные колебания $u(z,t)$ при длине $l = 300\text{м}$ и частоте вращения $\omega = 5$ об/мин

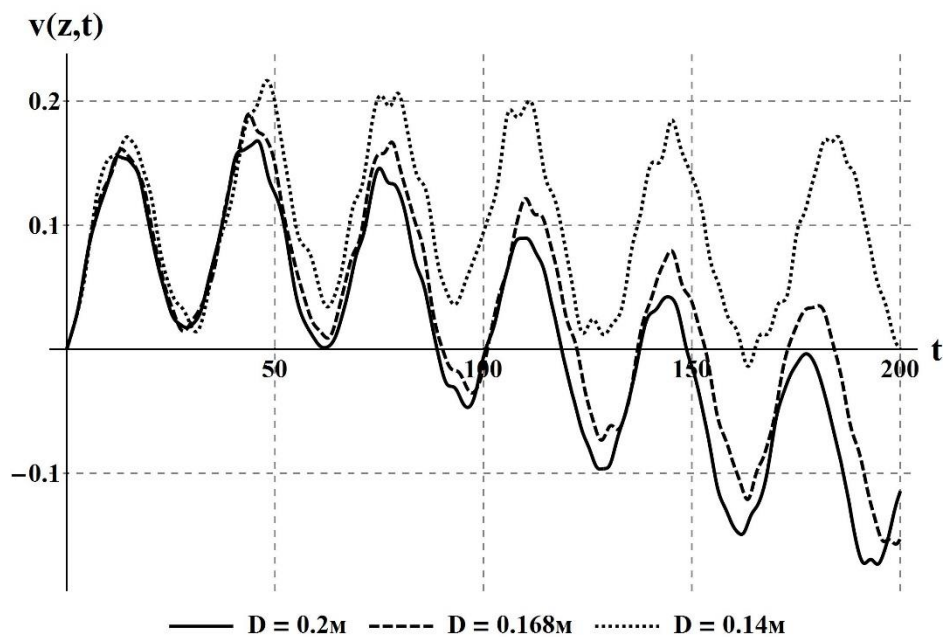


Рисунок 47 – Влияние выбора толщины стенок буровой колонны на ее поперечные колебания $v(z,t)$ при длине $l = 300\text{м}$ и частоте вращения $\omega = 5$ об/мин

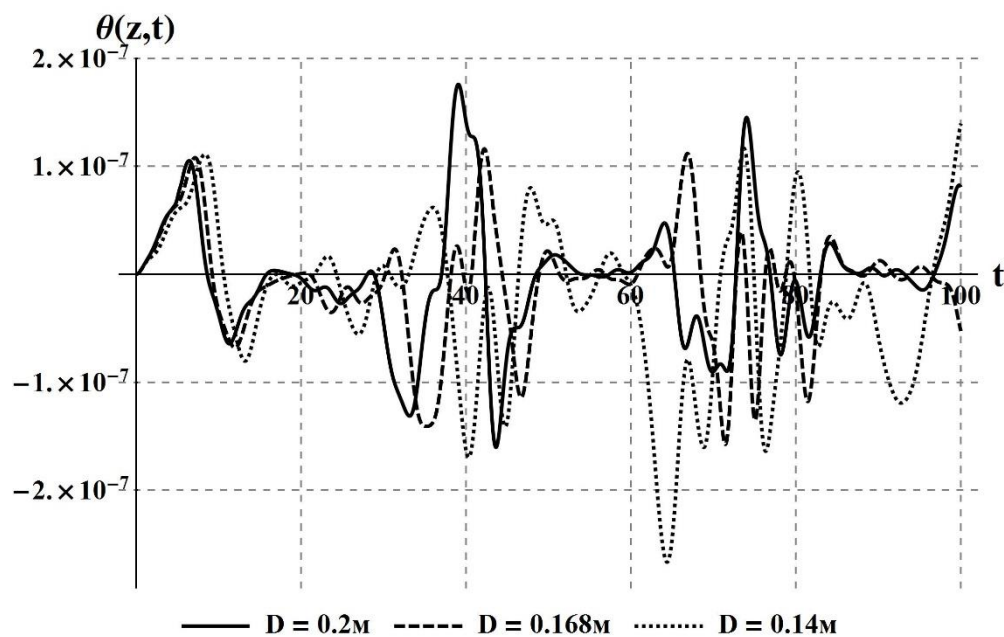


Рисунок 48 – Влияние выбора толщины стенок буровой колонны на ее крутильные колебания при длине $l = 300\text{м}$ и частоте вращения $\omega = 5\text{ об/мин}$

Как и в плоском случае, уменьшение внешнего диаметра буровой колонны с $D = 0.2\text{м}$ до $D = 0.168\text{м}$, а, следовательно, и толщины стенок колонны, приводит лишь к незначительному увеличению амплитуды изгибно-крутильных колебаний, уменьшение внешнего диаметра до $D = 0.14\text{м}$ вызывает более сильное возмущение колебаний, которое, однако, не является критическим.

Рисунки 49-51 показывают влияние внешних сжимающих нагрузок $T = 2.2 \times 10^3\text{Н}$ и $T = 2.2 \times 10^4\text{Н}$ на изгибно-крутильные движения колонны. Рассматривалась колонна длиной $l = 100\text{м}$, $\omega = 40\text{ об/мин}$. Значения остальных параметров приведены ранее.

Для сжимающей силы, так же как и в плоском случае, увеличения ее величины в 10 раз для вызывает увеличение как поперечных, так и крутильных колебаний, при этом последние остаются на несколько порядков меньше поперечных колебаний.

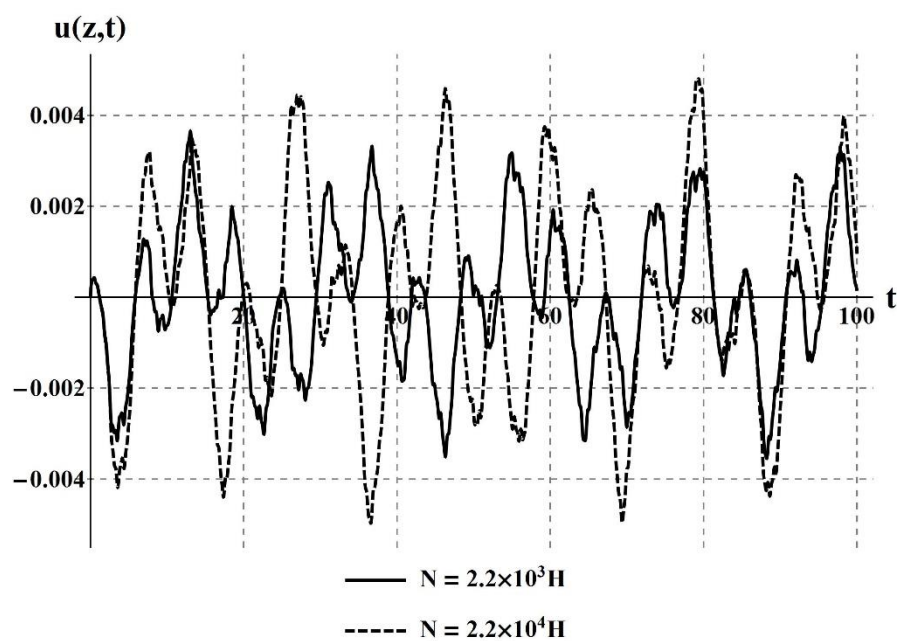


Рисунок 49 – Поперечные колебания $u(z,t)$ бурильной колонны ($l = 100 \text{ м}$, $\omega = 40 \text{ об/мин}$) при изменении внешней сжимающей нагрузки

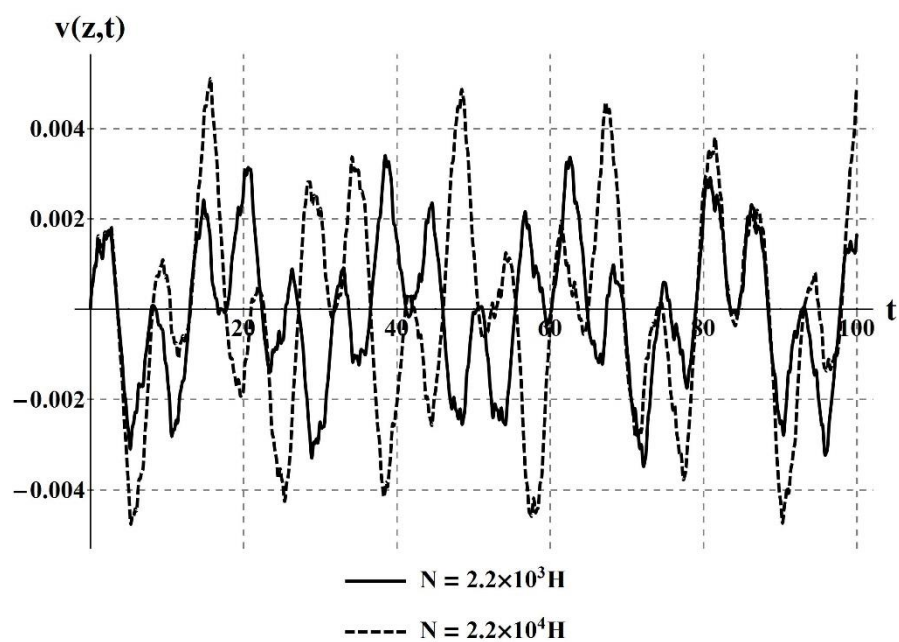


Рисунок 50 – Поперечные колебания $v(z,t)$ бурильной колонны ($l = 100 \text{ м}$, $\omega = 40 \text{ об/мин}$) при изменении внешней сжимающей нагрузки

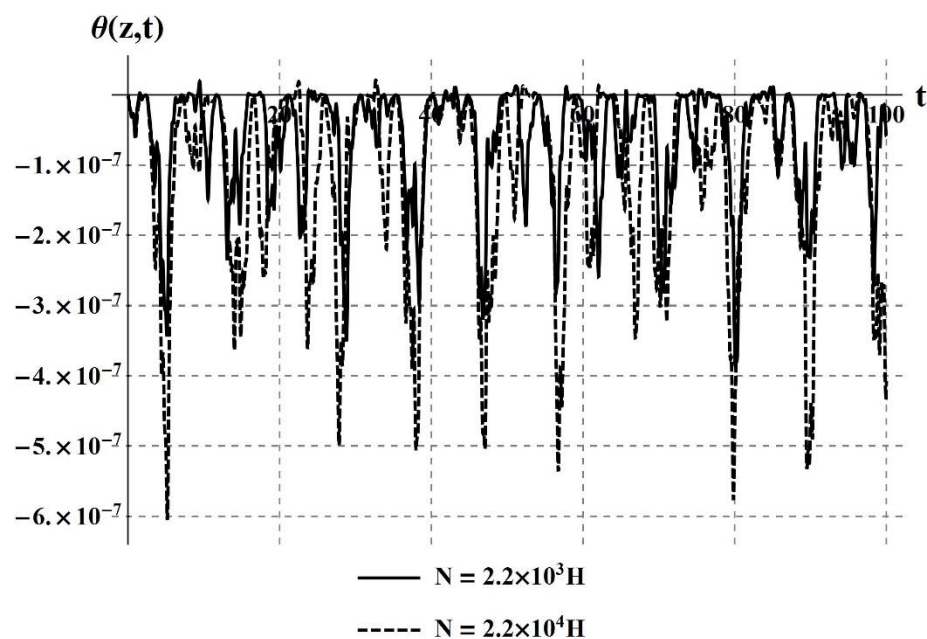


Рисунок 51 – Крутильные колебания буровой колонны ($l = 100\text{ м}$, $\omega = 40$ об/мин) при изменении внешней сжимающей нагрузки

На рисунках 52 и 53 изображены параметрические кривые для составляющих изгибных колебаний $u(z,t)$ и $v(z,t)$ в точке $z = 0.49l$ в первом и четвертом приближениях.

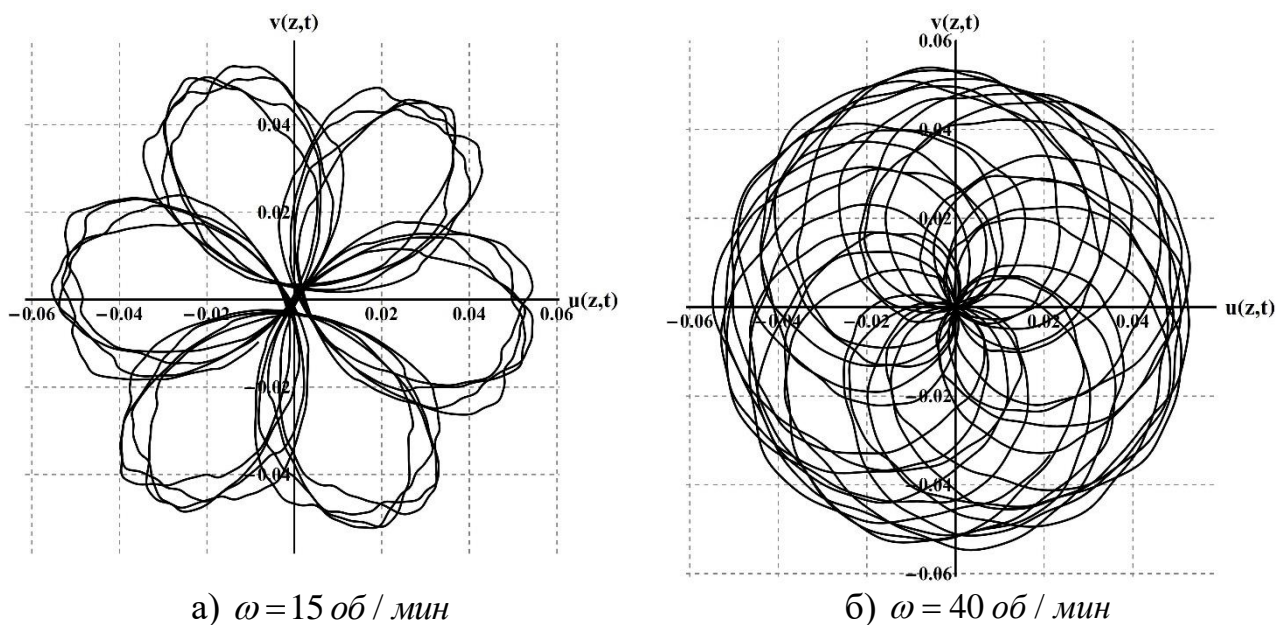


Рисунок 52 – Параметрические кривые для поперечных колебаний буровой колонны в четвертом приближении

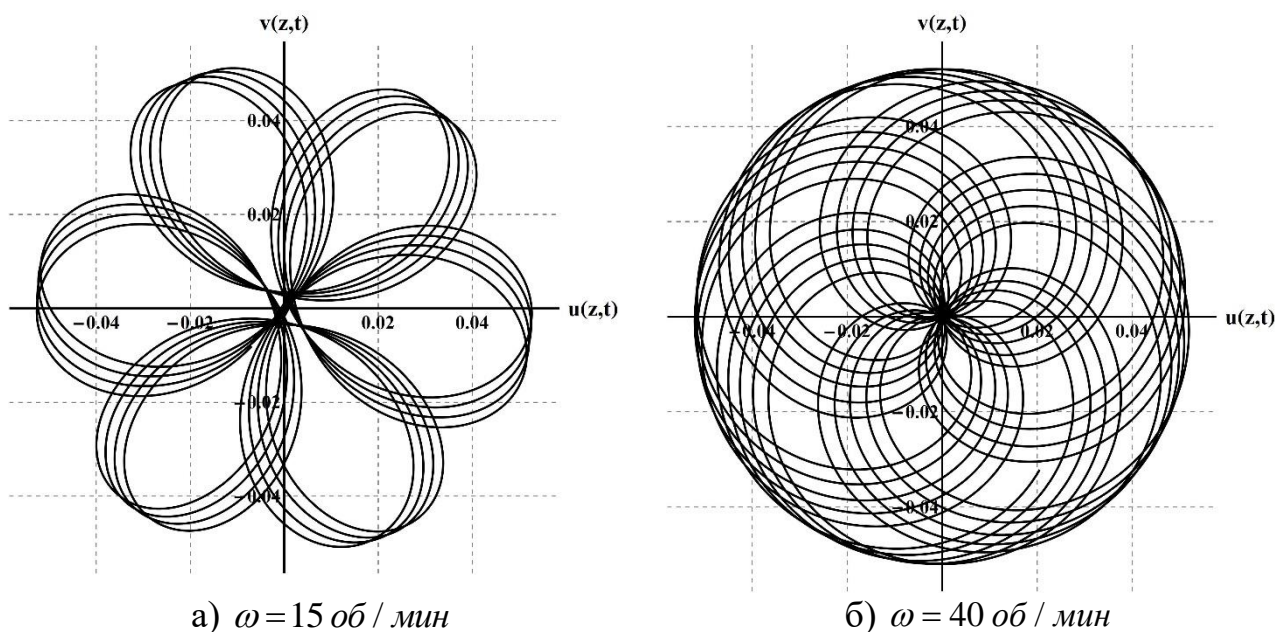


Рисунок 53 – Параметрические кривые для поперечных колебаний буровой колонны в первом приближении

На рисунке 53 для приближения только по первой моде получились фигуры напоминающие кривые Лиссажу [106], что в свою очередь ожидаемо, т.к. строятся параметрические кривые для взаимно перпендикулярных составляющих поперечных колебаний упругой оси буровой колонны. Так же как и для кривых Лиссажу, здесь при отсутствии частоты вращения мы бы наблюдали прямую, проходящую через начало координат из третьей четверти в первую четверть. Это бы означало, что частоты колебания составляющих поперечных колебаний $u(z,t)$ и $v(z,t)$ совпадают, так что по сути достаточно рассматривать плоский случай. С ростом частоты вращения картина меняется, т.к. в колебательном процессе начинается учитываться эффект от вращения буровой колонны. Амплитудные и частотные характеристики для составляющих поперечных колебаний существенно разнятся. На рисунке 52 заметно влияние других мод, которые вносят незначительные поправки в форму кривых, но тем не менее основную форму задают первая мода и частота вращения.

2.7 Краткие выводы по разделу

В данном разделе были разработаны математические модели колебаний буровых колонн как движение упругого стержня для малых и конечных деформаций.

Был проведен многопараметрический анализ изгибных колебаний сжато-скрученной буровой колонны при малых деформациях. Для выбранных диапазонов параметров были получены приближения в главном, построены их дисперсионные кривые и проведено численное сравнение полученных кривых с дисперсионной кривой полного уравнения. Так для случая (В) полученное

асимптотическое приближение не описывает колебательный режим, в случае (А) первое приближение описывает слияния двух дисперсионных кривых в одну, поэтому оно было уточнено и в следующем приближении с достаточной точностью описывала дисперсионные кривые полного уравнения. Для низкочастотного режима используя метод многих-масштабов было получено квазистатическое приближение, которое имеет не нулевые корни по причине преднапряжения нашей буровой колонны крутящим моментом и продольной сжимающей нагрузкой. Был показан пример замыкания краевой задачи, когда у полученного приближения недостаточно произволов, чтобы удовлетворить всем 4 граничным условиям.

Для плоских изгибных колебаний буровой колонны в случае малых колебаний был применен аппарат теории обобщенных функций. Полученные решения позволяют определять напряженное состояние стержневых конструкций при разнообразных геометрических размерах и упругих параметрах, а также во всем диапазоне частот колебаний. При этом можно исследовать воздействие на них сосредоточенных силовых источников, описываемых сингулярными обобщенными функциями. Нетрудно видеть, что алгоритм решения сохраняется и для обратных краевых задач, если на одном конце стержня задать не два краевых условия, а три, а на другом одно, недостающее для разрешимости системы, или даже 4 значения на одном, при неизвестных значениях на другом. Этот класс полуобратных и обратных задач очень важен для практических приложений при изготовлении разнообразных контроллеров для измерительных приборов конструкций, работающих в условиях переменных динамических воздействий.

В случае конечных деформаций был проведен численный анализ изгибно-крутильных колебаний буровой колонны для плоского и пространственных случаев. Исходные системы уравнений в частных производных были сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений путем применения метода Бубнова-Галеркина. Было изучено влияние основных параметров буровой колонны на ее колебания. Из полученных результатов было отмечено, что: увеличение длины буровой колонны ведет к росту амплитуды поперечных колебаний в плоском и пространственном случаях, при этом амплитуды крутильных колебаний уменьшаются; увеличение частоты вращения буровой колонны влечет увеличение амплитуд изгибно-крутильных колебаний только в плоском случае, в пространственном же случае частота влияет на форму параметрической кривой описываемой результирующим поперечным изгибом колонны; уменьшение внешнего диаметра колонны ведет к неравномерному увеличению амплитуд изгибно-крутильных колебаний, т.е. изменение внешнего диаметра нелинейно влияет на изменение амплитуд колебания; увеличение величины сжимающей нагрузки так же ведет к увеличению амплитуд изгибно-крутильных колебаний в обоих плоском и пространственном случаях.

3 МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ БУРОВОЙ ШТАНГИ С УЧЕТОМ ОСЛОЖНЯЮЩИХ ФАКТОРОВ

В данном разделе проводится моделирование нелинейных колебаний буровой штанги с учетом таких осложняющих факторов, как начальная кривизна штанги, трение буровой штанги о стенки скважины, особенность низа бурильной колонны. Похожие задачи рассматривались ранее другими авторами, но в предположение малости деформации, т.е. только для линейных моделей. Автор же рассмотрел эти задачи для конечных деформаций, что позволяет разрабатывать более полные и близкие к реальности модели, в то время как линейные модели зачастую приводят к завышенным и не всегда точным результатам, что может приводить к неверным выводам при изучении динамики бурильных колонн. Ввиду наибольшего разрушающего воздействия изгибных колебаний, основное внимание в разделе уделяется именно им. Подтверждения преобладающего влияния изгибных колебаний над крутильными и продольными колебаниями были изучены и представлены в работах [124] и [125], соответственно.

3.1 Модель движения буровой штанги с учетом начальной кривизны

Как было отмечено в [126], реальные элементы конструкций всегда обладают начальной погибью (кривизной), так что приложенные к ним силы действуют с некоторым эксцентриситетом. Эти факторы могут существенно повлиять на поведение системы. Исследование таких систем (с начальными несовершенствами) важно, прежде всего, с практической стороны, так как позволяет приблизить модели к реальным конструкциям. Конечно перечисленные факторы являются, как правило, случайными, поэтому обоснованно оценить их эффект можно лишь с привлечением статистических методов.

Теоретические исследования влияния начальных несовершенств на динамическое поведение структуры конструкции развиваются в двух направлениях. Первое направление - детерминистское, основывается на том, что амплитуда и форма начальных геометрических неправильностей известны для каждого конкретного случая. Второе направление - предполагается, что начальные возмущения образуют случайное поле [127, 128]. В настоящей работе исследуется нелинейная динамика бурильной колонны со случайной формой начальной кривизны.

3.1.1 Разработка модели пространственных изгибных колебаний

Разработанный и представленный ранее потенциал упругого деформирования среды носит обобщающий характер и позволяет переходить к частным случаям деформирования буровых штанг, в частности, учитывать начальную кривизну штанги при моделировании ее динамики.

В данном подразделе рассматривается моделирование движения буровой штанги неглубинного бурения с учетом начальной кривизны. Известно, что реальные элементы конструкций в той или иной мере обладают начальной

погибью (кривизной), вызванной технологическими процессами – неточностями их изготовления, литья, сборки и другими причинами. Наличие начальной погиби элемента ведет к появлению эксцентриситета для действующих на него сил, усиливая их действие. Поэтому, учет этого факта, а также снятие ограничений на величины деформаций приведут к уточнению моделей и их приближению к реальным процессам, происходящим в динамических системах. Они могут существенно повлиять на поведение системы, например, динамическую устойчивость. Автором работы [129] было отмечено, что наиболее неблагоприятным фактором, ухудшающим устойчивость конструкции, являются ее начальные геометрические несовершенства. Впоследствии это утверждение было подтверждено целым рядом исследований.

Рассматривается пространственный изгиб вращающейся буровой штанги с начальной кривизной. При этом полагается, что продольных перемещений нет. Тогда упругие перемещения стержневых элементов запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z, t) &= u_1(z, t) - u_0(z), \\
 V(x, y, z, t) &= v_1(z, t) - v_0(z), \\
 W(x, y, z, t) &= -\frac{\partial u_1(z, t)}{\partial z} x + \frac{du_0(z)}{dz} x - \frac{\partial v_1(z, t)}{\partial z} y + \frac{dv_0(z)}{dz} y,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $u_1(z, t), v_1(z, t)$ – полные изгибы в соответствующих плоскостях, возникающих в процессе деформации; $u_0(z), v_0(z)$ – проекции начальной кривизны.

Относительные удлинения и углы поворота волокна после деформации определяются как:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= 0; \quad e_{yy} = 0; \\
 e_{zz} &= -\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} x + \frac{d^2 u_0}{dz^2} x - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} y + \frac{d^2 v_0}{dz^2} y; \\
 e_{xy} &= 0; \quad e_{xz} = 0; \quad e_{yz} = 0; \\
 \omega_x &= -\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{dv_0}{dz}; \quad \omega_y = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz}; \quad \omega_z = 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Уравнение функционала (2.91) упрощается к виду:

$$\Phi = \frac{G}{1-2\nu} \left[(1-\nu)e_{zz}^2 + e_{zz}(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2}(\omega_x^4 + \omega_y^4) + \frac{5-6\nu}{2}\omega_x^2\omega_y^2 \right]. \tag{3.3}$$

Тогда потенциальная энергия деформации определяется как:

$$\begin{aligned}
U_p = & \frac{G}{1-2\nu} \int_0^l \left[(1-\nu) I_y \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 u_0}{dz^2} \right)^2 + (1-\nu) I_x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right)^2 + \right. \\
& + 2(1-\nu) I_{xy} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 u_0}{dz^2} \right) \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + \frac{A}{2} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz} \right)^4 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right)^4 \right) + \\
& \left. + \frac{(5-6\nu)A}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz} \right)^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right)^2 \right] dAdz. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Потенциала внешней нагрузки определяется как:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2} \int_0^l \left(T \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{du_0}{dz} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{dv_0}{dz} \right)^2 \right] + \right. \\
& \left. + M_z \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 u_0}{dz^2} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right) - \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz} \right) \right] \right) dz. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Кинетическая энергия вращающегося стержня с угловой скоростью ω будет определяться так же, как и ранее:

$$\begin{aligned}
U_k = & \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[A \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^2 \right) + I_y \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} \right)^2 + 2I_{xy} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} + \right. \\
& \left. + \omega^2 (I_y + I_x) + A\omega^2 \left((u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \right) + 2\omega A \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} (v_1 - v_0) - \frac{\partial v_1}{\partial t} (u_1 - u_0) \right) \right] dz. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Используя вариационный принцип Остроградского-Гамильтона, получены два уравнения движения и четыре естественных граничных условия [48]:

$$\begin{aligned}
\rho \left(-A \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_y \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^2 \partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^4 v_1}{\partial z^2 \partial t^2} + \omega^2 A u_1 - 2\omega A \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \\
+ M_z \left(\frac{\partial^3 v_1}{\partial z^3} - \frac{d^3 v_0}{dz^3} \right) - EI_y \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} - EI_{xy} \frac{\partial^4 v_1}{\partial z^4} + \frac{3EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 u_0}{dz^2} \right) + \\
+ \frac{(5-6\nu)EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right)^2 \right) = \rho \omega^2 A u_0 - EI_y \frac{d^4 u_0}{dz^4} - EI_{xy} \frac{d^4 v_0}{dz^4}; \quad (3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho \left(A \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + I_x \frac{\partial^4 v_1}{\partial z^2 \partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^2 \partial t^2} + \omega^2 A v_1 + 2\omega A \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - \\
& - M_z \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} - \frac{d^3 u_0}{dz^3} \right) - EI_x \frac{\partial^4 v_1}{\partial z^4} - EI_{xy} \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + \frac{3EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + \\
& + \frac{(5-6\nu)EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz} \right)^2 \right) = \rho \omega^2 A v_0 - EI_x \frac{d^4 v_0}{dz^4} - EI_{xy} \frac{d^4 u_0}{dz^4}. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\rho I_y \frac{\partial^3 u_1}{\partial z \partial t^2} - \rho I_{xy} \frac{\partial^3 v_1}{\partial z \partial t^2} + T \frac{\partial u_1}{\partial z} - M_z \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + EI_y \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} - \frac{d^3 u_0}{dz^3} \right) + \right. \\
& EI_{xy} \left(\frac{\partial^3 v_1}{\partial z^3} - \frac{d^3 v_0}{dz^3} \right) - \frac{EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz} \right)^3 - \\
& \left. - \frac{(5-6\nu)EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right)^2 \right] \delta u_1 \Big|_0^l = 0, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\rho I_x \frac{\partial^3 v_1}{\partial z \partial t^2} - \rho I_{xy} \frac{\partial^3 u_1}{\partial z \partial t^2} + T \frac{\partial v_1}{\partial z} + M_z \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 u_0}{dz^2} \right) + EI_x \left(\frac{\partial^3 v_1}{\partial z^3} - \frac{d^3 v_0}{dz^3} \right) + \right. \\
& + EI_{xy} \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} - \frac{d^3 u_0}{dz^3} \right) - \frac{EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right)^3 - \\
& \left. - \frac{(5-6\nu)EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz} \right)^2 \right] \delta v_1 \Big|_0^l = 0, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\left(EI_{xy} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + EI_y \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 u_0}{dz^2} \right) + \frac{M_z}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right) \right) \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \Big|_0^l = 0, \quad (3.11)$$

$$\left(EI_x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + EI_{xy} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{d^2 u_0}{dz^2} \right) - \frac{M_z}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{du_0}{dz} \right) \right) \delta \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \Big|_0^l = 0. \quad (3.12)$$

Если сделать ряд допущений и упрощений построенной модели (3.7)-(3.12), то, получаем, как частный случай, линейные уравнения работы [28], то есть построенная модель охватывает больший класс задач упругого движения буровых штанг, учитывающий их начальные несовершенства и конечность деформаций.

3.1.2 Численный анализ частного случая плоских изгибных колебаний

В случае плоских изгибных колебаний модель из предыдущего подраздела будет выглядеть следующим образом:

$$\rho \left(-A \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + I_x \frac{\partial^4 v_1}{\partial z^2 \partial t^2} + \omega^2 A v_1 \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - EI_x \frac{\partial^4 v_1}{\partial z^4} + \frac{EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{dv_0}{dz} \right)^3 = \rho \omega^2 A v_0 - EI_x \frac{d^4 v_0}{dz^4}; \quad (3.13)$$

Так же, как и во второй главе, для получения решения модели (3.13) был применен метод Бубнова-Галеркина. Сжимающую нагрузку принимали постоянной и распределенной по длине стержня, $T(z, t) = T$.

В соответствии с методом Бубнова-Галеркина, поперечное перемещение $v_1(z, t)$ было представлено в виде ряда:

$$v_1(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{V}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right), \quad (3.14)$$

где $\bar{V}_k(t)$ – неизвестные функции времени, а функции $\sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right)$ – собственные формы поперечных колебаний стержня постоянного сечения.

При исследовании динамической устойчивости стержней, нагруженных изменяющимися во времени усилиями, обычно предполагается, что если величина продольной силы не слишком велика, то форма упругой линии лишь незначительно отличается по своему виду от первой собственной формы. Однако для исследования при больших продольных силах и для нелинейной динамики буровых штанг учет лишь первой формы колебаний не отражает всю картину движения [130].

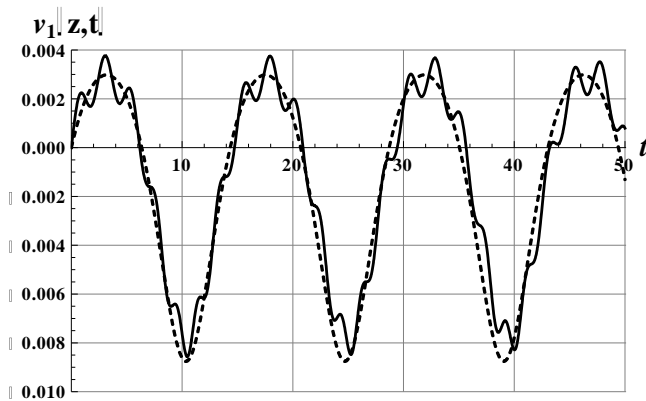
Поэтому необходимо изучить какой вклад вносят в решение (3.13) формы изгиба буровой колонны. Автором работы рассмотрены колебания буровой колонны, где форма изгиба оси буровой штанги задается спектром гармонических форм (первой, третьей и пятой).

Исследовалась дюралюминиевая буровая штанга с шарнирно-опертыми граничными условиями и со следующими геометрическими и физическими параметрами: $E = 0.7 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 2700$ кг/м³, $T(t) = 2.2 \cdot 10^3 \sin(\omega t)$ Н, $l = 100$ м, $A = 2.01 \cdot 10^{-2}$ м², $I_x = 6.83 \cdot 10^{-5}$ м⁴, $v_0 = 0.05 \sin(\pi z / l)$, $\omega = 0.5$ рад/с.

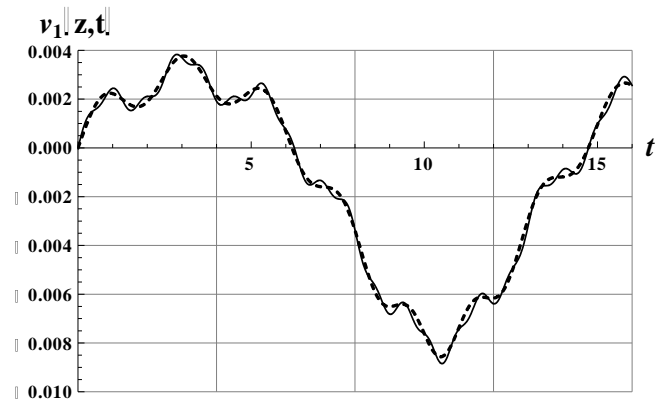
Сравнение результатов численного анализа колебаний дюралюминиевой буровой штанги по основной и первым трем формам (сечение $z_{fix} = 19l / 20$) свидетельствует, что уточнение формы колебаний буровой штанги ведет к увеличению амплитуды ее колебаний (рисунок 54, а). Это приближает решение исследуемой модели к реальности физического процесса, происходящего в буровых штангах. В случае же колебаний со спектром форм изгиба до пяти существенных отличий между тремя и пяти формами не отмечено (рисунок 54, б). Поэтому дальнейшие уточнения решений за счет форм изгиба

не представляется целесообразным. Можно ограничиться рассмотренными приближениями (рисунок 54, рисунок 56).

Проведя сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей, установлено, что нелинейность модели ведет к уменьшению амплитуды колебаний, что не противоречит известным результатам других исследователей (рисунок 55, а). Отсутствие же начальной кривизны ведет к уменьшению амплитуды колебаний буровой штанги, тем самым повышая устойчивость ее движения (рисунок 55, б).

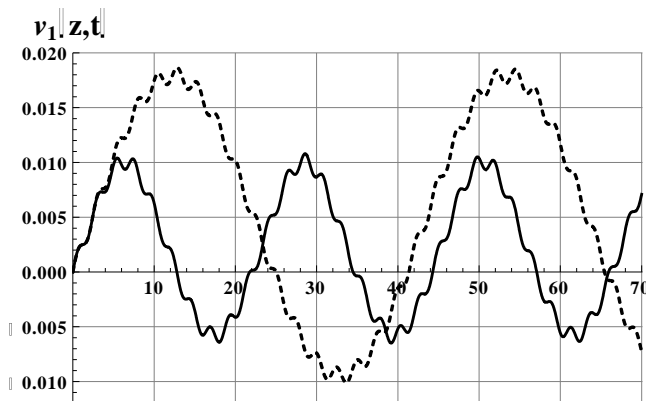


а) первая форма – пунктирная линия, первые три формы – сплошная линия

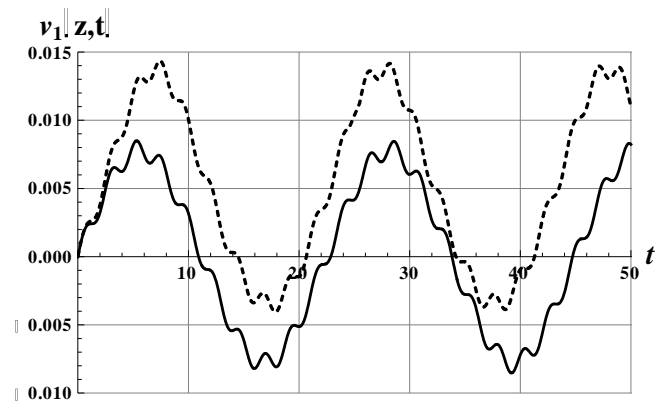


б) первые три формы – пунктирная линия, первые пять форм – сплошная линия

Рисунок 54 – Сравнение разных форм колебаний буровой колонны



а) линейная модель – пунктирная линия, нелинейная – сплошная линия



б) с учетом начальной кривизны – пунктирная линия, без учета – сплошная линия

Рисунок 55 – Влияние нелинейности и начальной кривизны для первых трех форм колебаний буровой колонны

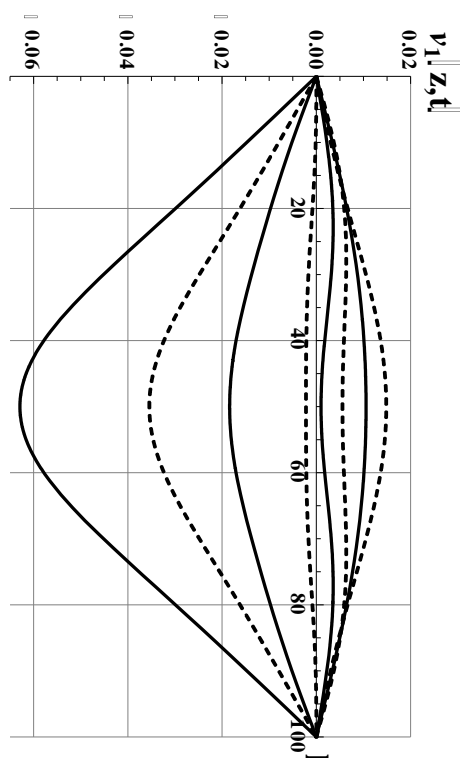


Рисунок 56 – Колебания по первым пяти модам в разные моменты времени по всей длине

В последней главе настоящей работы будет рассмотрено задание начальной кривизны как случайного поля и моделирование стохастических процессов.

Таким образом, в данном разделе работы построена нелинейная модель колебаний буровых штанг с начальной кривизной. Модели построены в рамках нелинейной теории деформируемых сред без ограничений на величины деформаций. Разработанные модели позволят исследовать малоизученный класс нелинейных задач динамики бурового оборудования.

3.2 Модель движения вертикальной буровой штанги с учетом влияния сил трения о стенки скважины

Известно, что в теории вращающихся валов большое внимание уделяется вопросам их балансировки и самоцентрирования в целях предотвращения прецессионных колебаний. Однако в теории бурения этим вопросам отводится меньше внимания. Основная причина этого заключается в том, что изгибные колебания ограничены поверхностью стенки скважины. С одной стороны, это стабилизирует движение системы, с другой – усложняет характер колебаний и постановку задачи, так как в процессе колебаний буровой штанги между ней и стенками скважины возникают различные осложняющие эффекты типа контактного трения, прилипания и др.

3.2.1 Модель упругого деформирования буровой штанги

Для построения динамической модели движения буровой штанги с учетом конечных деформаций и влияния сил трения о стенки скважины используется

так же, как и в разделе 2.6, принцип Остроградского-Гамильтона. Для определения полной энергии буровой штанги необходимо задать модель упругого деформирования буровой штанги, а также контактного взаимодействия штанги со стенками скважины.

Рассмотрен случай пространственного изгиба буровой штанги. Буровая штанга, аналогично с разделом 2.6, рассматривать как цилиндрический стержень с постоянной площадью поперечного сечения A , вращающегося вокруг оси OZ с постоянной угловой скоростью ω и находящегося под действием сжимающей продольной нагрузки и скручивающего момента. Таким образом, выражения для кинетической и потенциальной энергий изгибных колебаний можно получить из уравнений (2.102) и (2.97), соответственно. Достаточно в этих уравнениях опустить слагаемые с углом поворота. Получим:

$$\begin{aligned}
 U_k = & \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[A \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + A \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} \right)^2 + \right. \\
 & + 2I_{xy} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} + I_x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial t} \right)^2 + I_p \omega^2 + A(u_1^2 + v_1^2) \omega^2 + \\
 & \left. + 2\omega A v_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - 2\omega A u_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} \right] dz.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 U_p = & \frac{G}{1-2\nu} \int_0^l \left[\frac{A}{2} \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^4 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^4 \right) + \right. \\
 & + (1-\nu) \left(I_y \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right)^2 + 2I_{xy} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + I_x \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right)^2 \right) + \\
 & \left. + \frac{A(5-6\nu)}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \right)^2 \right] dz,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Прежде чем использовать принцип Остроградского-Гамильтона, необходимо также учесть для потенциала внешних усилий (2.103) силы контактного взаимодействия и трения буровой штанги о стенку скважины.

Будем предполагать, что контакт буровой штанги со стенкой скважины происходит только в одной точке, причем в том сечении, где обычно наблюдается наибольшая амплитуда изгибных колебаний. Схема контактного взаимодействия буровой штанги и стенки буровой скважины изображены на рисунке 57.

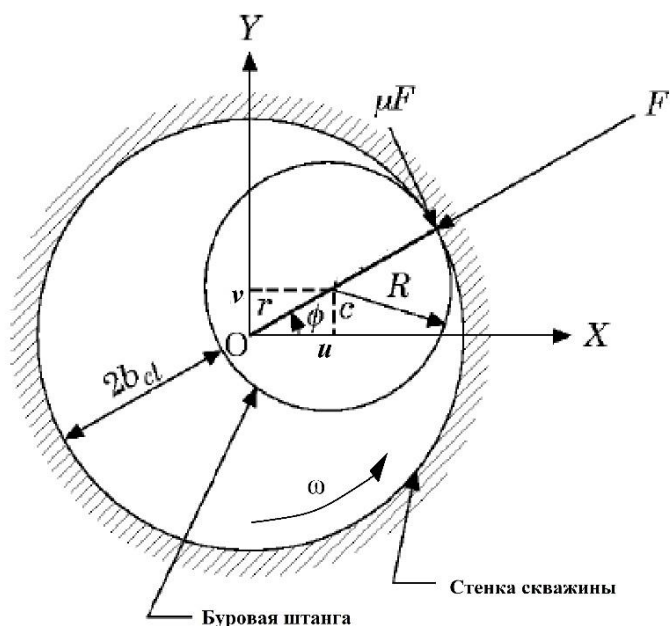


Рисунок 57 Схема действия сил контактного взаимодействия и трения

Предполагается, что между штангой и стенкой скважины образуется зазор b_{cl} , и в случае, когда центр поперечного сечения штанги приближается на расстояние меньше зазора, то начинает действовать сила контактного взаимодействия F . Так же в этой точке, в силу вращения штанги, будет возникать сила трения, которая пропорциональна силе контактного взаимодействия с коэффициентом пропорциональности μ .

Сила контактного взаимодействия будет получена из контактного закона Герца [13]:

$$F = \begin{cases} -K_h (r - b_{cl})^{3/2}, & \text{если } |r_c| \geq b_{cl}, \\ 0, & \text{если } |r_c| < b_{cl}, \end{cases} \quad (3.17)$$

где K_h – жесткость Герца, которая может зависеть от свойств материала и геометрии объектов [131], $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ – положение геометрического центра поперечного сечения буровой штанги.

В итоге виртуальная работа сил контактного взаимодействия и трения о стенку скважины будет выглядеть следующим образом:

$$\delta W = \int_0^l \frac{F}{r} \{ [u + \text{sign}(\Phi) \mu v] \delta u + [v - \text{sign}(\Phi) \mu u] \delta v \} \delta(z - z_c) dz, \quad (3.18)$$

где $\delta(z - z_c)$ – дельта функция Дирака, z_c – сечение в котором происходит контакт, Φ – скорость штанги в точке контакта, которая определяется как:

$$\Phi = r_c \dot{\phi} + R\omega, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right), \quad (3.19)$$

здесь R – внешний радиус буровой штанги.

Используя вариационный принцип Остроградского-Гамильтона:

$$\delta Q = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U_k - U_p + W) dt = 0 \quad (3.20)$$

и полученные ранее выражения для кинетической и потенциальной энергии, а также для потенциала внешних нагрузок и работы сил контактного взаимодействия и трения о стенку скважины (3.15), (3.16) и (3.18), приходим к следующим уравнения движения буровой штанги:

$$\begin{aligned} & \rho \left(-A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 Au + 2\omega A \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial u}{\partial z} \right) + M_z \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \\ & + \frac{3EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{(5-6\nu)EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{F}{r} (u + \text{sign}(\Phi) \mu v) \delta(z - z_c) = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega^2 Av + 2\omega A \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial v}{\partial z} \right) - M_z \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \\ & + \frac{3EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{(5-6\nu)EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{F}{r} (v - \text{sign}(\Phi) \mu u) \delta(z - z_c) = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Полученные уравнения движения являются нелинейными, так как в них учитывается геометрическая нелинейность и нелинейность силы контактного взаимодействия.

Общность нелинейной модели (3.21)-(3.22) позволяет получать из нее частные модели при тех или иных допущениях, например:

а) классическая линейная модель движения буровой штанги

Очевидно, что если пренебречь нелинейными членами в построенной модели (3.21)-(3.22), то получим уравнения изгибных колебаний для классического линейного случая, широко известные в литературе:

$$\rho \left(-A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 Au + 2\omega A \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial u}{\partial z} \right) + M_z \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0, \quad (3.23)$$

$$\rho \left(A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega^2 Av + 2\omega A \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial v}{\partial z} \right) - M_z \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = 0. \quad (3.24)$$

б) модель движения буровой штанги при малых деформациях (геометрическая линейность) с учетом контактного взаимодействия и трения штанги о стенку скважины:

$$\begin{aligned} & \rho \left(-A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 A u + 2\omega A \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial u}{\partial z} \right) - EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \\ & + \frac{F}{r} (u + \operatorname{sgn}(\Phi) \mu v) \delta(z - z_c) = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega^2 A v + 2\omega A \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial v}{\partial z} \right) - EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \\ & + \frac{F}{r} (v - \operatorname{sgn}(\Phi) \mu u) \delta(z - z_c) = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь нелинейность модели проявляется за счет нелинейности сил контактного взаимодействия штанги со стенками скважины и сил трения.

в) модель движения буровой штанги при конечных деформациях без учета сил контактного взаимодействия и трения штанги о стенку скважины:

$$\begin{aligned} & \rho \left(-A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 A u + 2\omega A \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial u}{\partial z} \right) + M_z \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \\ & + \frac{3EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{(5-6\nu)EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega^2 A v + 2\omega A \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial v}{\partial z} \right) - M_z \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \\ & + \frac{3EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{(5-6\nu)EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

и другие случаи.

Это говорит о достоверности полученной модели (3.21)-(3.22), тестируемой классической линейной моделью, ее общности и полноте в описании динамики реалистичных процессов, происходящих при бурении скважин, что позволяет получать из (3.21)-(3.22) частные модели. Для выявления особенностей этой нелинейной модели необходимо провести ее анализ, выявить влияние нелинейных факторов на поведение динамической системы с целью определения опасных нежелательных процессов и исключения их из рабочих режимов движения буровой штанги. Для этого далее проводится численный анализ модели при заданных геометрических, физических и рабочих характеристиках штанги.

3.2.2 Численный анализ модели

Численный анализ нелинейной модели (3.21)-(3.22) проводится для случая с шарнирно-опертыми граничными условиями, учитывая, что на краях предполагается наличие стабилизирующих устройств. Это позволяет использовать метод Бубнова-Галеркина, представляя решение математической модели в виде суммы ряда гармонических функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям:

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \\ v(z,t) &= \sum_{i=1}^n g_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Расчёты проводились для стальной штанги с плотностью материала $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, модулем Юнга $E = 2,1 \times 10^5 \text{ МПа}$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,28$, с внешним диаметром $D = 0,2 \text{ м}$ и внутренним диаметром $d = 0,12 \text{ м}$, площадью поперечного сечения штанги $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \approx 2,01 \times 10^{-2} \text{ м}^2$, моментом инерции кольцевого сечения $I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \approx 6,84 \times 10^{-5} \text{ м}^4$, длиной штанги $l = 300 \text{ м}$, частотой ее вращения $\omega = 5 \text{ об/мин}$, продольной сжимающей нагрузкой $N = 2,2 \times 10^3 \text{ Н}$, жесткостью Герца $K_h = 6,78 \times 10^{11} \text{ Нм}^{-1,5}$, $\mu = 0,1$, и с зазором $b_{cl} = 0,05 \text{ м}$.

Численные расчеты произведены в прикладной программе для символьных вычислений Wolfram Mathematica 10.3 для трех случаев: геометрически линейная задача с учетом контакта и трения, нелинейная задача без учета контакта и трения, нелинейная задача с учетом контакта и трения.

На рисунке 58 изображены численные результаты для одной моды нелинейной задачи без учета контактных сил. На рисунках 59 и 60 - результаты для нелинейной и линейной задач, соответственно.

Сравнивая рисунки 58-59 легко заметить, что наличие контактных сил не позволяет нашей модели совершать колебания, превышающие по величине зазор между буровой штангой и стенкой скважины. Сравнение результатов геометрически нелинейных и линейных моделей (рисунки 59 и 60) говорит о том, что более реалистичные нелинейные колебания могут быть меньше, чем результаты, получаемые из линейных уравнений движения, которые по своей природе являются лишь первым приближением. Как правило, оно завышено. Поэтому на рисунке 60 наблюдается большее число пиков колебаний в их сравнении с рисунком 59 за тот же период времени, то есть линейная модель большее количество раз давала решение, превышающее зазор между штангой и скважиной, чем нелинейная модель. Результаты исследований хорошо согласуются с исследованиями авторов многих работ по нелинейной динамике

систем, подтверждающих количественную «завышенность» решений линейных моделей в сравнении с нелинейными.

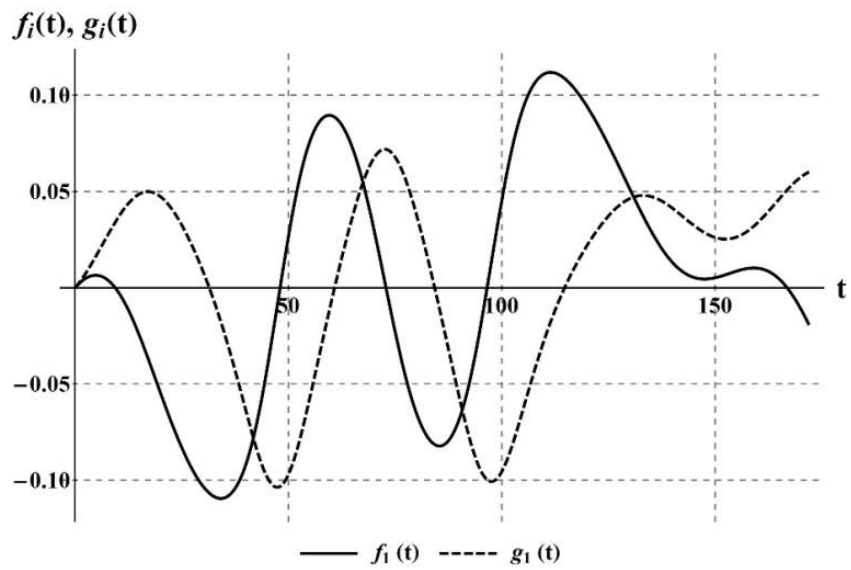


Рисунок 58 – Изгибные колебания буровой колонны для нелинейной задачи без учета контактных сил

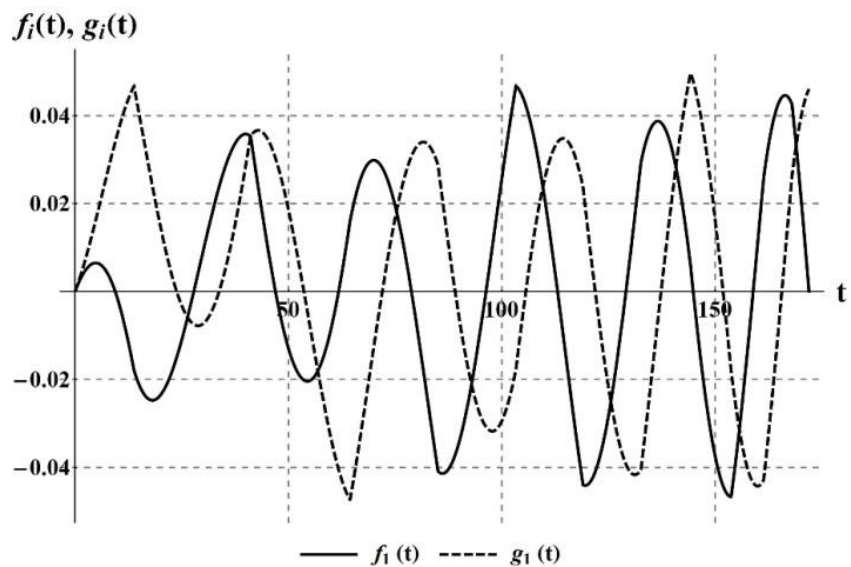


Рисунок 59 – Изгибные колебания буровой колонны для нелинейной задачи с учетом контактных сил

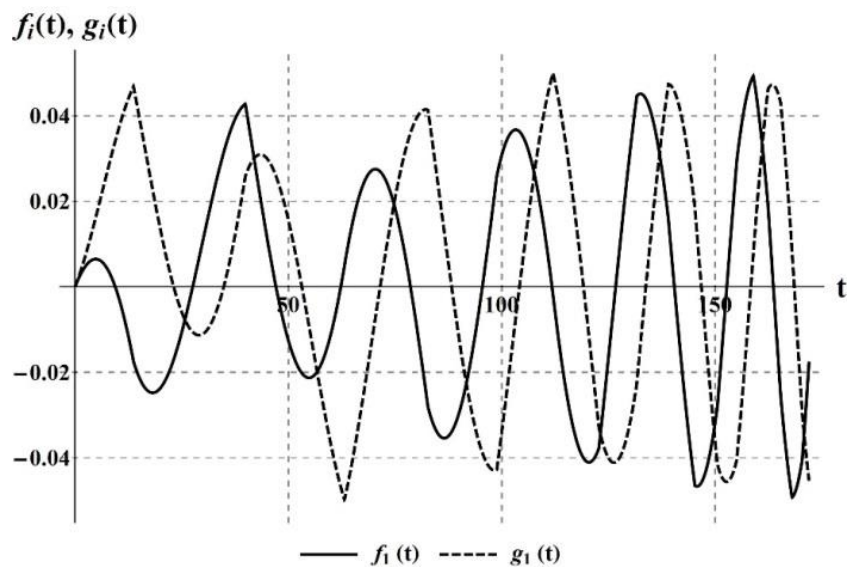


Рисунок 60 – Изгибные колебания буровой колонны для линейной задачи с учетом контактных сил

Следующие результаты приведены для решений, приближаемых более, чем одной модой, при этом стоит отметить, что четными модами в случае шарнирно опертых граничных условий можно пренебречь. Результаты нелинейной задачи с учетом контактных сил сравнивались для разных длин буровой штанги, частот вращения и т.д.

На рисунках 61-62 показаны поперечные колебания буровых штанг длиной 300 м и 400 м, соответственно. Решения приближались первой и третьей модой, так как уже было сказано выше, что на четных модах колебаний не возникает. А 5-ой модой можно пренебречь в силу того, что она вносит уже незначительные поправки в решение, несущественно влияя на амплитуду. Сечение бралось в середине буровой колонны т.к. там наибольшие величины прогибов. Можно легко заметить, что при увеличении длины штанги, увеличивается число контактов со стенкой скважины. Это объясняется тем, что увеличивается эффект от продольной нагрузки, результатом которой является большее Эйлера выпучивание стержня. Тем самым контактов становится больше, т.к. стержень чаще выпучивается на величину, превышающую зазор скважины.

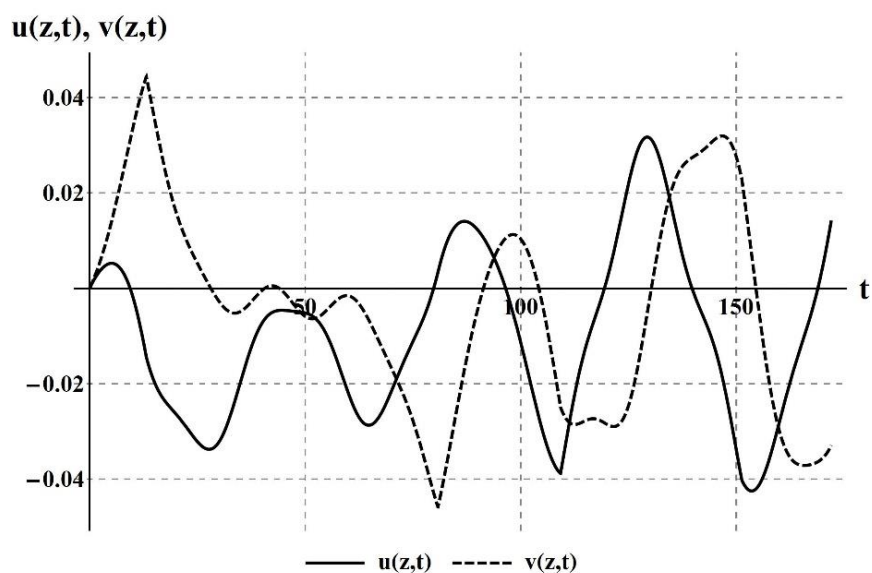


Рисунок 61 – Изгибные колебания буровой колонны длиной 300м

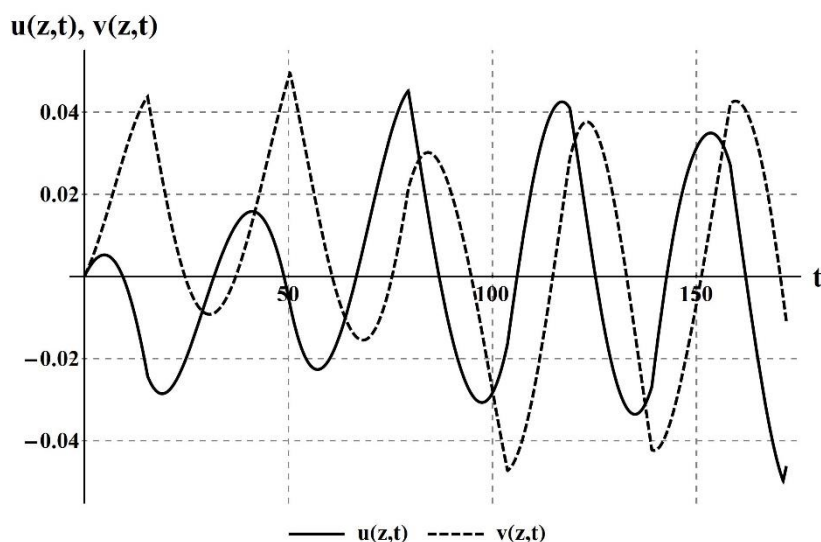


Рисунок 62 – Изгибные колебания буровой колонны длиной 400м

На рисунках 63-64 показаны колебания буровой штанги для разных частот вращения. Ясно, что при увеличении частоты вращения, «рваных» движений становится меньше, и влияние контактной силы становится более гладким. Это можно также увидеть на рисунках 65-66, где показаны движения геометрического центра буровой колонны для разных частот.

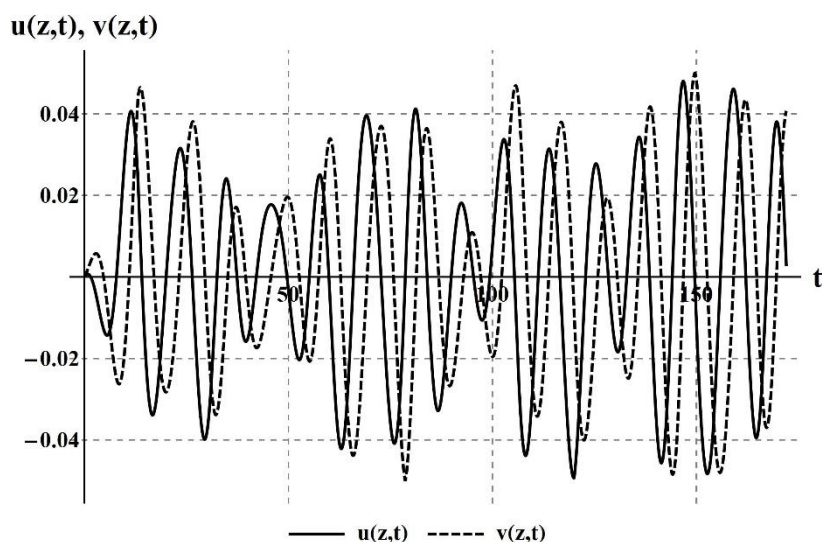


Рисунок 63 – Изгибные колебания буровой колонны с частотой вращения 30 об/мин

В качестве других вариантов для сравнения, можно было бы увеличить силу продольного сжатия, но она должна быть не больше критического значения, иначе решение будет неустойчивым. Но и без рисунков понятно, что как и в случае с увеличением длины буровой колонны, получим тот же эффект и при увеличении продольной нагрузки.

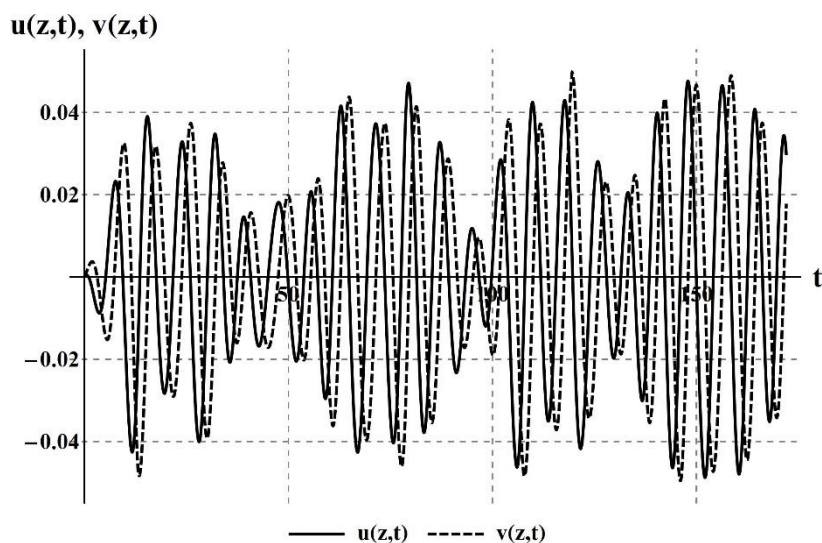


Рисунок 64 – Изгибные колебания буровой колонны с частотой вращения 45 об/мин

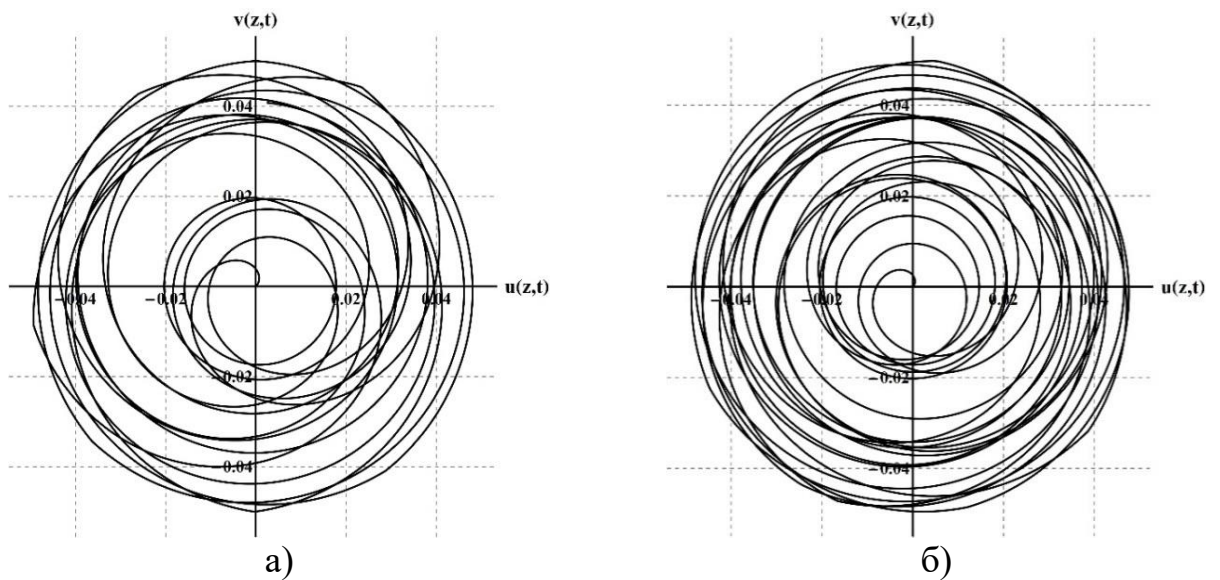


Рисунок 65 – Траектория движения геометрического центра буровой колонны
 а) с частотой вращения 30 об/мин, б) с частотой вращения 45 об/мин

На рисунках 66 (а, б) показаны фазовые плоскости для каждого из перемещений $u(z,t)$ и $v(z,t)$. Частота вращения в этом случае 45 об/мин. Остальные параметры без изменений. На них можно заметить, что при контакте со стенкой скважины происходит уменьшение скорости, что говорит о влиянии фрикционной силы.

На рисунке 67 показан с помощью параметрической 3D визуализации результирующий поперечный изгиб буровой колонны вдоль всей длины, при этом на рисунках ось z масштабируется для удобства отображения результатов.

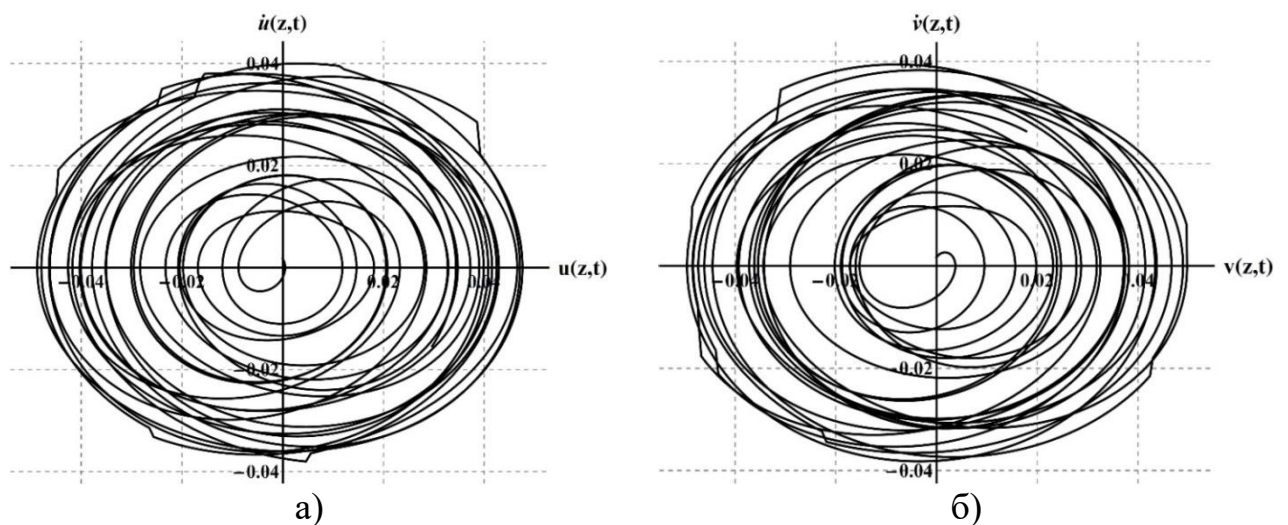
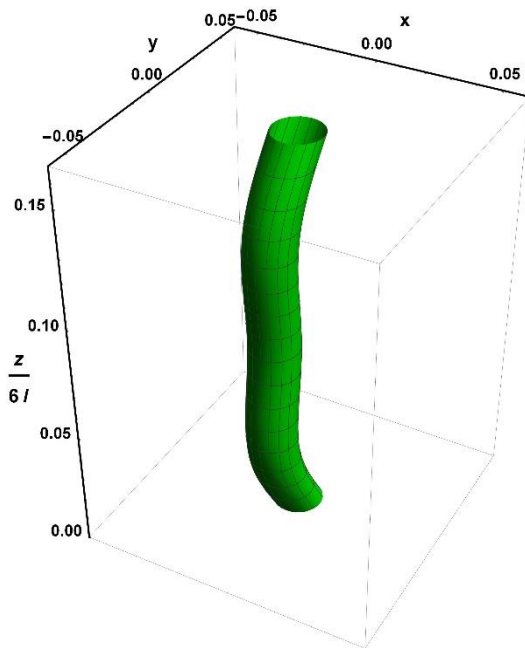
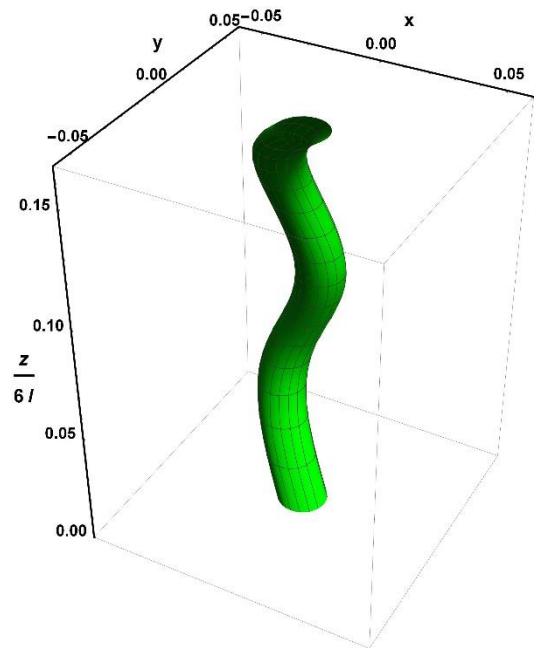


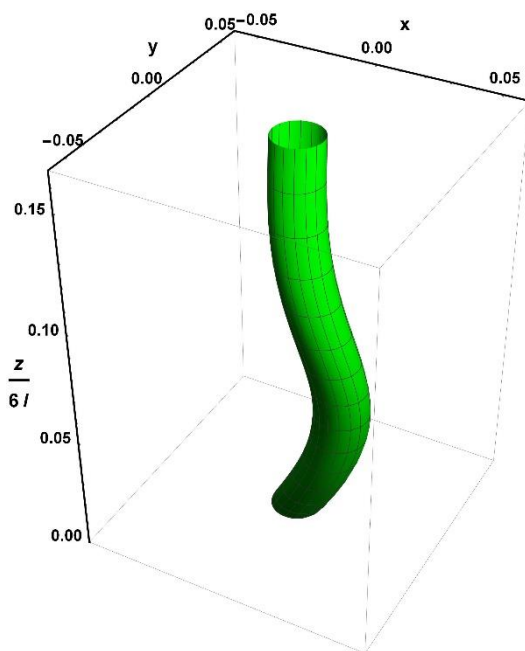
Рисунок 66 – Фазовая плоскость поперечных колебаний геометрического центра буровой колонны а) $u(z,t)$, б) $v(z,t)$



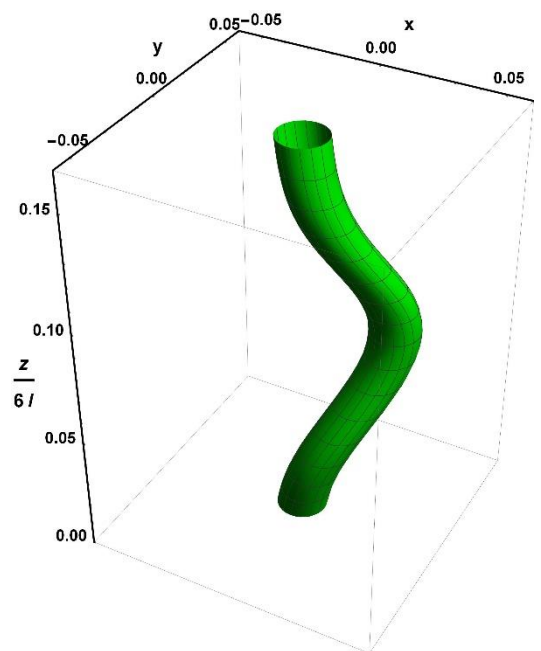
а) $t = 5\text{c}$



б) $t = 74\text{c}$



в) $t = 147\text{c}$



г) $t = 172\text{c}$

Рисунок 67 – Динамика упругого деформирования оси колонны в плоскости Oyz

Как показывает рисунок 67, с течением времени ось стержня принимает различные формы изгиба с наибольшими отклонениями от недеформированного положения в центральном сечении.

Таким образом, в данном подразделе была разработана нелинейная математическая модель движения буровой штанги с учетом конечных деформаций и влияния сил трения о стенки скважины, проведен ее численный

анализ, который заключался в численной обработке скачков, необходимой в силу непрерывности контактных сил.

Результаты исследований представлены графически как изменение амплитуды перемещений буровых колонн во времени, а также 3-D визуализации перемещений буровой штанги. Изучено влияние основных параметров буровой штанги на ее колебания. В результате численного анализа установлено, что: увеличение длины буровой колонны, так же, как и увеличение величины продольной нагрузки, ведет к росту количества контактов со стенкой скважины; увеличение частоты вращения буровой колонны влечет незначительное увеличение амплитуд изгибных колебаний, а также влияет на форму параметрической кривой, описываемой результирующим поперечным изгибом колонны. Представлены фазовые плоскости, где отчетливо заметно влияние фрикционных сил на динамику буровых колонн.

3.3 Модель движения горизонтальной буровой штанги с учетом влияния сил трения о стенки скважины

В этом подразделе рассмотрена задача движения горизонтальной бурильной колонны с учетом сил трения о стенки скважины. Модель продольных колебаний колонны была предложена в работе T.G. Ritto и его соавторов [67]. Исследуемая модель носит нелинейный характер и анализируется методом сосредоточенных параметров с целью изучения эффективности применения указанного метода к динамическому анализу оборудования нефте-газодобывающей промышленности. Обычно метод сосредоточенных параметров успешно применяется в строительной механике для анализа конструкций в виде балок с переменным сечением, разнородными материалами. Удобен метод так же для анализа конструкций с локальным или точечным нагружением. Впервые данный метод был применен для исследования динамических систем, в частности плоских механизмов со стержневыми элементами, в работах J.P. Sadler [132].

Как и в работе T.G. Ritto и др., рассмотрено движение горизонтальной буровой штанги длиной L под действием статической сжимающей нагрузки на левом конце бурового оборудования, переменной гармонической силы на бур, продольной реакции со стороны породы на бур, а также гравитационных сил и сил трения колонны о породу (рисунок 58).

Исследуется ее динамическая модель, задаваемая уравнением вида:

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f_{sta}(x,t) + f_{har}(x,t) + f_{bit}(\dot{u}(x,t)) + f_{fric}(\dot{u}(x,t)) + f_{mass}(\ddot{u}(x,t)), \quad (3.30)$$

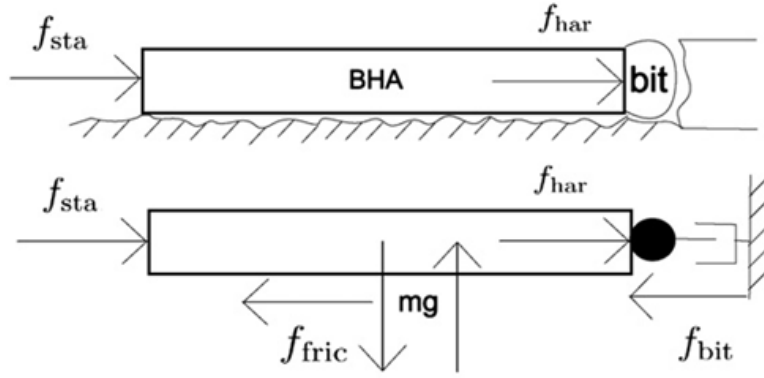


Рисунок 58 – Схема нагружения бурового оборудования

где u – продольное перемещение буровой колонны. Правая часть уравнения (3.30) содержит в себе действующие на буровое оборудование нагрузки. При этом концевые нагрузки представляются как:

$$f_{sta}(x, t) = F_{sta} \delta(x), \quad (3.31)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, F_{sta} – амплитуда нагрузки,

$$f_{har}(x, t) = F_0 \sin(\omega_f t) \delta(x - L), \quad (3.32)$$

где F_0 и ω_f – амплитуда и частота гармонической нагрузки, соответственно.

Согласно схеме нагружения (рисунок 58), модель (3.30) представляется следующим уравнением с краевыми условиями:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{fric}(\dot{u}(x, t)) \quad (3.33)$$

$$x = 0: \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} = -F_{sta} \quad (3.34)$$

$$x = L: \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} = f_{har}(x, t) + f_{mass}(\ddot{u}(x, t)) + f_{bit}(\dot{u}(x, t))$$

где

$$\begin{aligned} f_{fric}(\dot{u}(x, t)) &= -\mu(x)(\rho A)g \operatorname{sgn}(\dot{u}(x, t)), \\ f_{har}(x, t) &= F_0 \sin(\omega_f t), \\ f_{mass}(\ddot{u}(x, t)) &= -m_{bit} \ddot{u}(x, t), \\ f_{bit}(\dot{u}(x, t)) &= \begin{cases} c_1 e^{-c_2 \dot{u}(x, t)} - c_1, & \text{при } \dot{u}(x, t) > 0, \\ 0, & \text{при } \dot{u}(x, t) \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Введем безразмерные переменные: $u = L\tilde{u}$, $x = L\tilde{x}$, $t = \frac{\tilde{t}}{c}$, $c = \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$, при этом знак « \sim » в дальнейшем будет опущен. После упрощений получено:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\mu(x)g}{Lc^2} \text{sgn}(\dot{u}(x,t)), \quad (3.36)$$

$$x=0: \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F_{sta}}{EA}, \quad (3.37)$$

$$x=1: \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\rho A)L}{m_{bit}} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F_0}{m_{bit}Lc^2} \sin\left(\frac{\omega_f}{c}t\right) + \frac{1}{m_{bit}Lc^2} f_{bit}(Lc\dot{u}(x,t)). \quad (3.38)$$

Модель движения горизонтальной буровой колонны (3.36) с краевыми условиями (3.37)-(3.38) носит нелинейный характер и моделируется методом сосредоточенных параметров. Численный анализ динами горизонтальной штанги с учетом случайно силы трения будет проведен в 4-ой главе.

3.4 Модель движения буровой штанги с учетом особенностей низа бурильной колонны

Как известно, из вибрационного движения низа бурильной колонны можно выделить три основных типа ее колебаний: продольные, крутильные и изгибные. Тем не менее, наиболее сложным механизмом обладают изгибные колебания низа бурильной колонны, вызванные действием на долото изменяющихся во времени нормальных и касательных сил контактного и фрикционного взаимодействия долота со стенкой скважины. Как показывают эксперименты и натурные наблюдения, в некоторых случаях центр долота начинает двигаться по довольно сложным траекториям, напоминающим многолепестковый цветок, с образованием на поверхности стенки скважины системы желобов, недопустимых по техническим условиям бурения [13, 133, 134].

3.4.1 Модель упругого деформирования буровой штанги

Колебания долота, вращающегося с угловой скоростью ω , обычно сопровождается вовлечением в вибрационный процесс также нижних участков колонны, которые расположены между центрирующими устройствами, играющими роль дополнительных опор. Учитывая, что наиболее интенсивные изгибные колебания буровой колонны наблюдаются в пролете, непосредственно примыкающем к долоту, пренебрежем влиянием верхней части буровой колонны и выделим ее фрагмент длиной l между двумя нижними центрирующими устройствами А и В. Также условно отделим его от консольного участка длиной e с долотом на конце (рисунк 59).

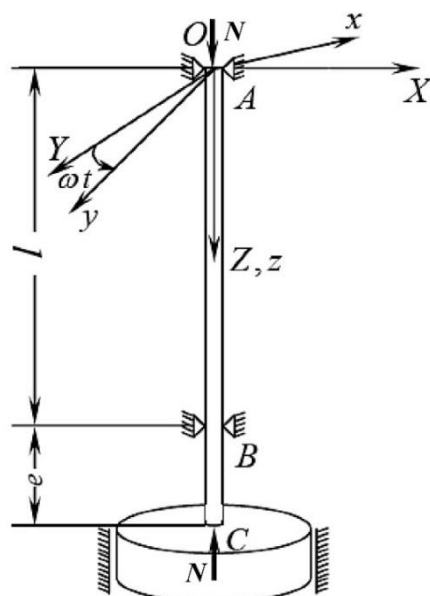


Рисунок 59 – Структура низа буровой колонны

Выделенный участок буровой колонны преднапряжен продольной сжимающей силой T , равной реакции опирания долота на дно скважины. Буровая колонна, так же, как и ранее, будет рассматриваться в качестве стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Для этого, как обычно, вводятся две системы координат. Одна неподвижная $OXYZ$ и вторая вращающаяся вместе с буровой колонной $Oxyz$ с общим началом в O на опоре A .

По аналогии с предыдущими разделами, при выводе уравнений движения буровой колонны использовались представления упругих перемещений в виде (2.92), относительных углов в виде (2.82). Упругий потенциал записывался в виде (2.91), тем самым потенциальная энергия деформации и кинетическая энергия оставались такими же, как и в (3.16), (3.15), соответственно. Действия продольной нагрузки и скручивающего момента учтены в потенциале внешней нагрузки так же как в (2.103), но здесь продольная нагрузка не постоянна вдоль оси стержня. Продольная сжимающая сила T представлялась как сумма реакции долота на взаимодействие с дном скважины и распределенной по оси стержня силы тяжести [28]:

$$T(z) = R - g\rho A(l - z), \quad (3.39)$$

где R – реакция долота на взаимодействие с дном скважины, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность материала конструкции, A – площадь сечения стержня.

Используя принцип Остроградского-Гамильтона (3.20), получены следующие уравнения движения буровой колонны:

$$\rho \left(-A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 A u + 2\omega A \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(T(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + M_z \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{3EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{(5-6\nu)EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) = 0, \quad (3.40)$$

$$\rho \left(F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega^2 A v + 2\omega A \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(T(z) \frac{\partial v}{\partial z} \right) - M_z \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{3EA}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{(5-6\nu)EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) = 0. \quad (3.41)$$

3.4.2 Формирование граничных условий

При формировании граничных условий на опоре А (рисунок 59) учитывалось, что она расположена между двумя пролетами, верхний из которых условно отделен и не рассматривается. Отметим отсутствие внешних активных поперечных сил, поэтому изгибные колебания возбуждаются только в результате фрикционного взаимодействия долота с породой на опоре В. Таким образом, собственные колебания и Эйлера выпучивание составных балок обычно происходят по наименее энергоемким формам, по которым балка в соседних пролетах выпучивается в противофазах с обратной симметрией относительно точки А. Следовательно, в этой точке перемещения u , v и их четные производные равны нулю, что равнозначно равенству нулю изгибающих моментов M_x и M_y . В результате на краю $z = 0$ имеем:

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \quad (3.42)$$

Для формирования граничных условий на опоре В в сечении $z = l$ необходимо приложить изгибающие моменты M_x и M_y , передаваемые со стороны долота. Подробнее о природе этих моментов написано в работе [15].

Во время бурения в условиях контактного взаимодействия боковой части долота со стенкой скважины, иногда образуется кольцевой зазор между их поверхностями, так что в результате упругих перемещений долото оказывается прижатым к стенке скважины лишь в одной точке К (рисунок 60).

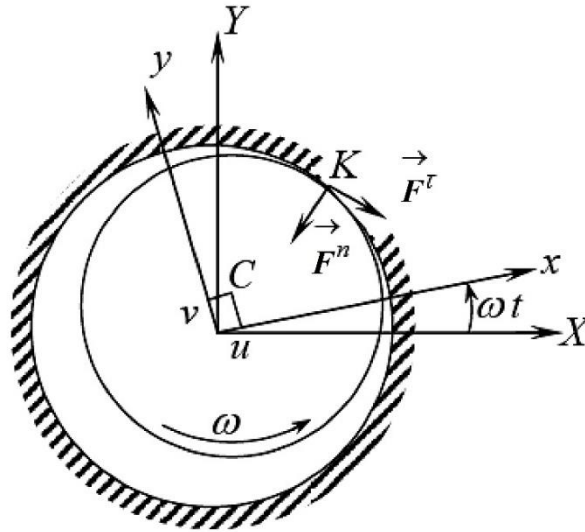


Рисунок 60 – Схема контактного взаимодействия долота со стенкой скважины

Возникающие в этой точке силы нормального \vec{F}^n и касательного взаимодействия \vec{F}^τ создают изгибающие моменты M_x, M_y в точке В и приводят колонну к изгибанию. Таким образом, для расчета колебаний рассматриваемой системы следует изучать динамику упругой двухопорной штанги АВ с консольным участком ВС длиной e . Однако, учитывая, что длина e намного меньше длины l , полагаем, что силы и моменты, действующие на долото в точке С, можно перенести в точку В и рассчитывать только балку АВ с соответствующими граничными условиями в точке В.

В результате поворота колонны на опоре В на углы $\partial u/\partial z, \partial v/\partial z$ долото прижимается к стенке скважины в точке К, и в этот момент на него действует сила нормального взаимодействия \vec{F}^n . Ее проекции на плоскости xOz, yOz будут составлять $F_x^n = -3EI_y u'/e^2$ и $F_y^n = -3EI_x v'/e^2$, соответственно [15]. Упругие моменты от этой силы в точке В равны $M_y^n = F_x^n e$ и $M_x^n = F_y^n e$. Или после подстановок имеем:

$$M_x^n = -3EI_x \frac{v'}{e}; \quad M_y^n = -3EI_y \frac{u'}{e}. \quad (3.43)$$

Проекции момента трения на соответствующие оси вычисляются следующим образом:

$$M_x^{fr} = -M^{fr} \frac{\partial u}{\partial z}; \quad M_y^{fr} = M^{fr} \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (3.44)$$

Так же принимается, что между долотом и стенкой скважины образуется зазор шириной δ , поэтому необходимо учитывать, что силы контактного

взаимодействия, следовательно, и их моменты будут убывать по мере увеличения зазора. Предполагается существование некоторого предельного значения δ_{\max} , при котором контакт между долотом и стенкой скважины теряется.

Учитывая все выше сказанное, граничные условия на краю $z = l$ можно сформулировать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u = 0, \quad EI_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\delta_{\max} - e\sqrt{(u')^2 + (v')^2}}{\delta_{\max}} \left(M^{fr} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{3EI_y}{e} \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ v = 0, \quad EI_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\delta_{\max} - e\sqrt{(u')^2 + (v')^2}}{\delta_{\max}} \left(-M^{fr} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{3EI_x}{e} \frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Система уравнений (3.40)-(3.41) с краевыми условиями (3.42) и (3.45) моделирует механизм возбуждения колебаний кружения низа буровой колонны с долотом с учетом собственного веса колонны.

3.4.3 Численный анализ модели

Учитывая сложность полученных граничных условий, использование метода Бубнова-Галеркина становится затруднительным. Поэтому для численных расчётов в пакете символьных вычислений Wolfram Mathematica 10.3 использовался метод PDEDiscretization.

Расчёты проводились для стальной штанги с плотностью материала $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, модулем Юнга $E = 2,1 \times 10^5 \text{ МПа}$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,28$, с внешним диаметром $D = 0,2 \text{ м}$ и внутренним диаметром $d = 0,12 \text{ м}$, площадью поперечного сечения штанги $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \approx 2,01 \times 10^{-2} \text{ м}^2$, длиной $l = 100 \text{ м}$, частотой вращения $\omega = 10 \text{ об/мин}$, моментом инерции кольцевого сечения $I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right) \approx 6,84 \times 10^{-5} \text{ м}^4$, продольной сжимающей нагрузкой $T = 2,2 \times 10^3 \text{ Н}$, длиной консольного участка $e = 5 \text{ м}$ и с зазором $\delta_{\max} = 0,02 \text{ м}$.

На рисунке 61 изображены численные результаты динамики изгибных колебаний буровой колонны с учетом особенностей ее низа и собственного веса.

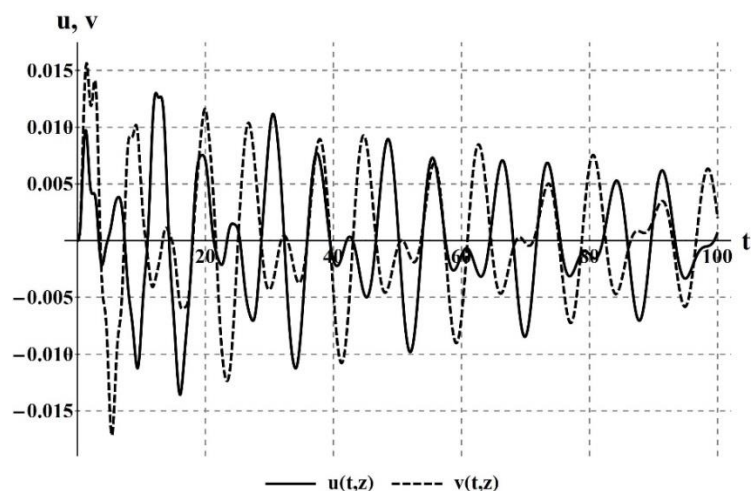


Рисунок 61 – Изгибные колебания буровой колонны для нелинейной модели с учетом особенностей низа бурильной колонны и собственного веса

Исследовано влияние на перемещения буровых колонн таких параметров как длина консольного пролета, длина буровой колонны, частота вращения, величины продольной нагрузки и др.

На рисунке 62 представлены перемещения колонны при уменьшении длины консольного пролета с 5 м до 1 м. Как видно из графика амплитуда колебаний возрастает, при этом частота не меняется. При увеличении длины до 150 м (рисунок 63) амплитуда значительно увеличивается, также и меняется частота колебаний.

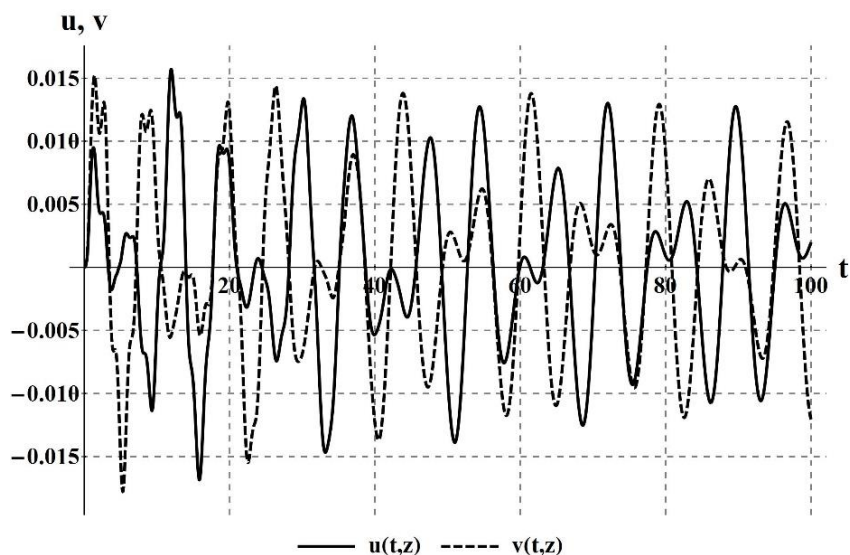


Рисунок 62 – Изгибные колебания буровой колонны при $e = 1$ м

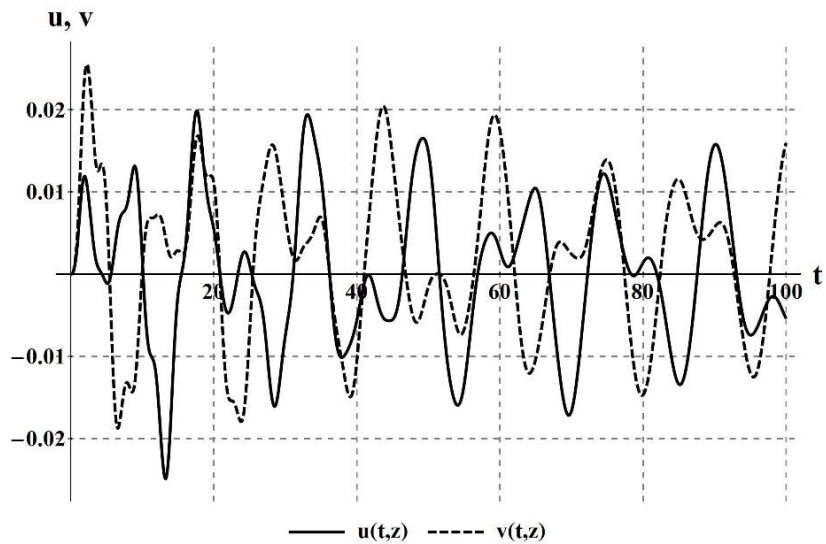


Рисунок 63 – Изгибные колебания буровой колонны для нелинейной модели при $l = 150$ м

При увеличении продольной сжимающей нагрузки (рисунок 64) в два раза – амплитуда изгибных колебаний буровой колонны незначительно увеличивается, но при этом частота колебаний практически не меняется. Увеличении частоты вращения в 3 раза ведет к увеличению амплитуды и частоты колебаний буровой колонны, при этом форма колебаний значительно отличается от формы колебаний для изначальных параметров (рисунок 65). На рисунках 66 и 67 представлены траектории движения геометрического центра срединного сечения буровой колонны при разных частотах.

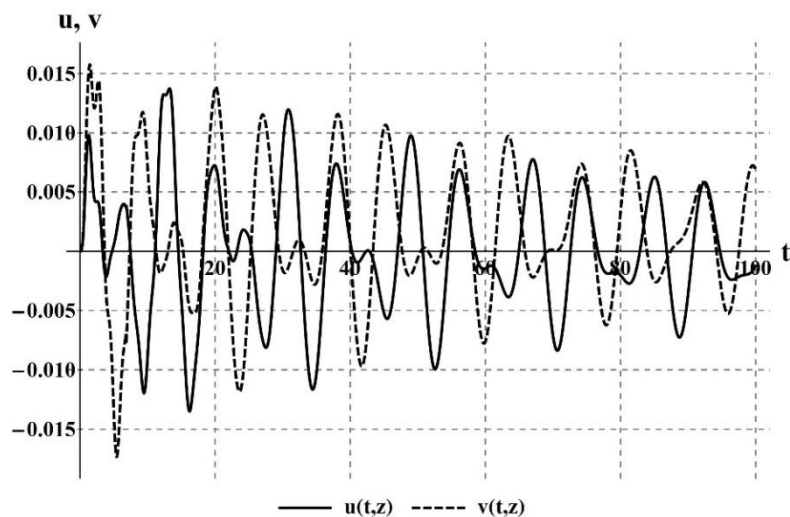


Рисунок 64 – Изгибные колебания буровой колонны для нелинейной модели при увеличении продольной нагрузки в два раза

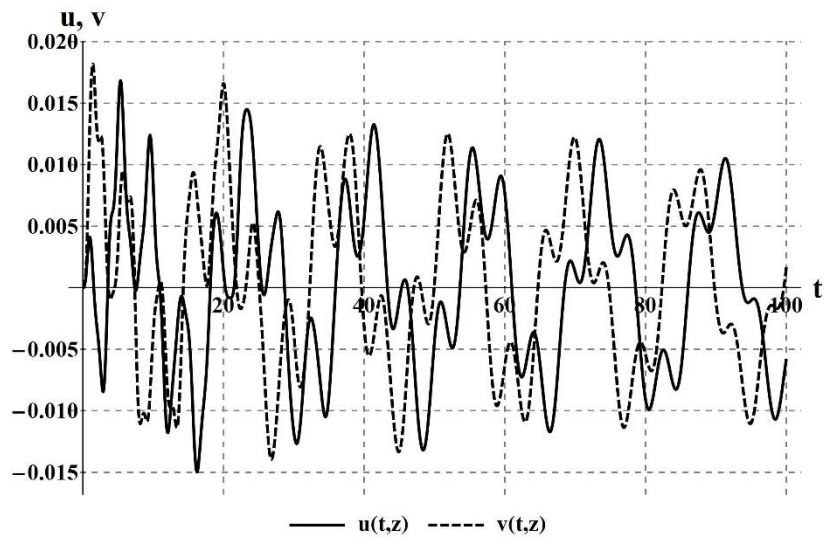


Рисунок 65 – Изгибные колебания буровой колонны для нелинейной модели при увеличении частоты вращения в 3 раза

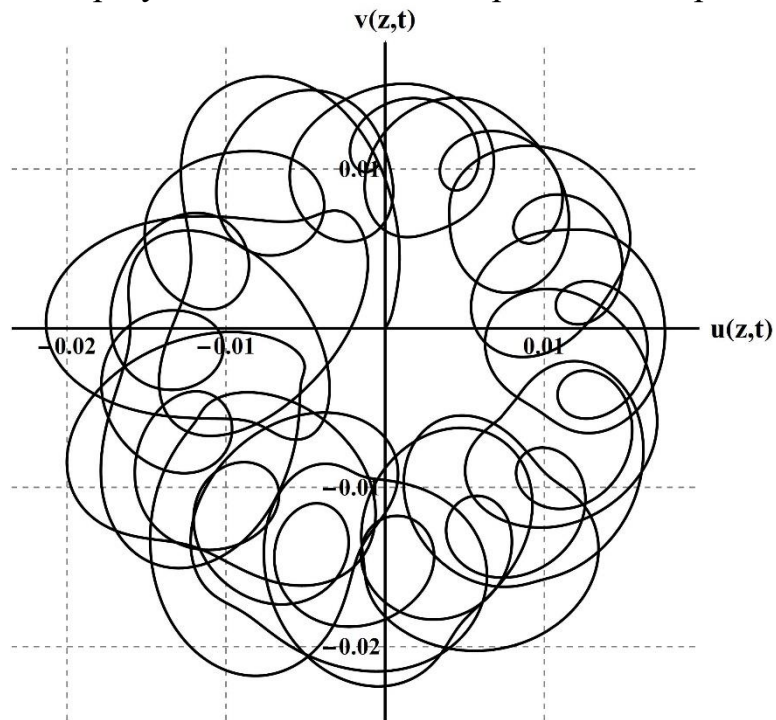


Рисунок 66 – Траектория движения геометрического центра сечения буровой колонны при $z = 50$ м и частоте вращения 60 об/мин

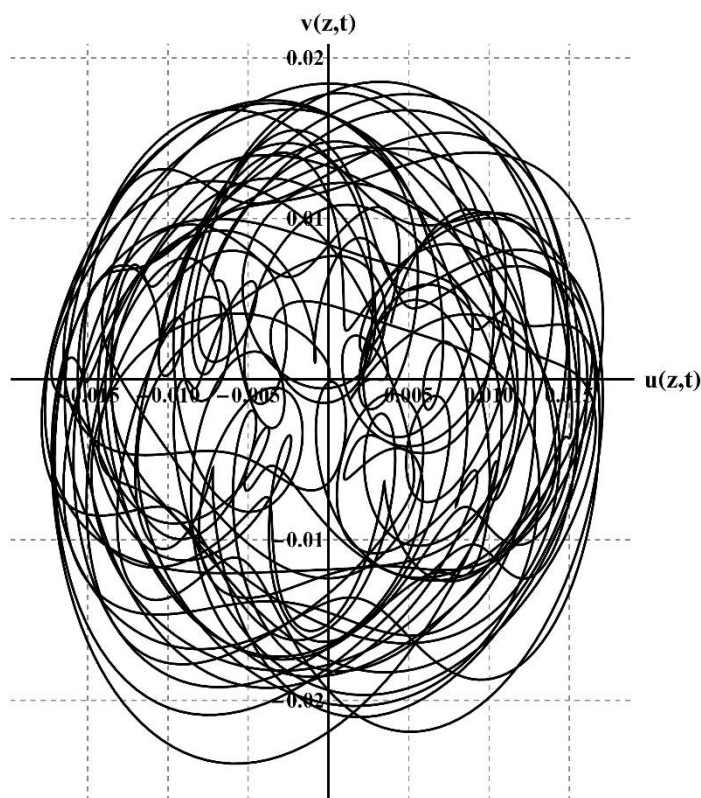


Рисунок 67 – Траектория движения геометрического центра сечения буровой колонны при $z = 50$ м и частоте вращения 150 об/мин

Из последних двух рисунков можно сделать вывод, что при увеличении частоты вращения, увеличиваются и влияния кориолисовых и центробежных сил, таким образом колонна вращается больше вокруг оси OZ , нежели своей центральной оси.

Таким образом, в данном подразделе была разработана нелинейная математическая модель движения буровой колонны с учетом собственного веса и особенностей ее низа. Квазианалитическое решение данной модели было затруднительно в силу особенностей краевых условий, так как применение метода Бубнова-Галеркина в случае сложных граничных условий труднореализуемо. Поэтому были проведены численные расчеты математической модели в среде Wolfram Mathematica 10.3 с применением метода дискретизации УРЧП PDEDiscretization.

Была проведена визуализация результатов и изучено влияние основных параметров буровой колонны на ее колебания. В результате установлено, что: увеличение длины буровой колонны, так же как и увеличение продольной нагрузки, ведет к росту амплитуды колебаний, но не ведет к увеличению частоты в последнем случае; увеличение частоты вращения буровой колонны влечет изменение как амплитуды, так и частоты, и в целом формы колебаний. Интересная картина наблюдается при построении траекторий перемещений геометрического центра срединного сечения колонны – при увеличении

частоты вращения буровой колонны, последняя стремится совершать круговые колебания вокруг оси OZ .

3.5 Краткие выводы по разделу

В данном разделе было проведено моделирование и численный анализ динамики буровой штанги с учетом осложняющих факторов: начальная кривизна штанги, трение буровой штанги о стенки скважины, особенность низа бурильной колонны. Модель движения горизонтальной буровой штанги с учетом влияния сил трения о стенки скважины была дискретизирована с помощью метода сосредоточенных масс, а ее численный анализ будет проводиться в следующем разделе при исследовании случайности природы осложняющих факторов.

Для остальных моделей было установлено:

а) наличие начальной погиби увеличивает амплитуду изгибных колебаний и как следствие ведет к уменьшению устойчивости ее движения;

б) наличие контакта со стенками скважины может привести к обрушению стенок. При увеличении длины буровой колонны или величины продольной нагрузки увеличивается количество контактов буровой колонны со стенками скважины, что вполне ожидаемо, т.к. увеличение этих параметров ведет к увеличению амплитуд изгибных колебаний.

в) при учете особенностей низа бурильной колонны амплитуда изгибных колебаний увеличивается при уменьшении длины консольного пролета и при увеличении длины самой буровой колонны. Незначительный рост амплитуды колебаний наблюдается при увеличении продольной сжимающей нагрузки. Увеличению частоты и амплитуды колебаний наблюдается лишь при увеличении частоты вращения буровой колонны, при этом увеличивается влияние кориолисовых и центробежных сил.

Результаты исследований хорошо согласуются с результатами работ других авторов, изучавших эти задачи в линейной постановке.

4 СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ БУРОВЫХ ШТАНГ

Процесс бурения всегда характеризуется интенсивными вибрациями глубинного оборудования из-за многочисленных факторов, в частности, неоднородности горных пород, случайных колебаний осевой нагрузки, наличия начальных дефектов, пульсаций давления промывочной жидкости. При этом, не всегда возможно количественно определить и учесть эти факторы в математической модели. Если для количественной оценки этих неопределенностей используется теория вероятностей, тогда математическая модель становится стохастической. В общем случае выделяют два типа неопределенностей: один тип связан со случайностью какого-либо параметра (алеаторическая или статистическая неопределенность); другой тип связан с отсутствием знаний о данном явлении или факторе (эпистемическая или систематическая неопределенность), которая связана с ошибками моделирования. Одним из способов учета неопределенностей является использование непараметрического вероятностного подхода [135], поскольку он способен моделировать как неопределенности параметров, так и неопределенности моделей.

На сегодняшний день, актуальна проблема разработки математических моделей, которые снимают ограничения на величины деформаций и/или учитывают случайность характера внешних воздействий на буровую колонну, а также формы ее первоначального изгиба. Таки образом, в данном разделе проводится моделирование нелинейных колебаний буровой штанги с учетом таких осложняющих факторов, как случайная начальная кривизна штанги, трение буровой штанги о стенки скважины неоднородной структуры.

4.1 Анализ колебаний сжато-скрученной буровой штанги с учетом случайной начальной кривизны

Рассмотрена задача плоского изгиба бурильной колонны длиной l с учетом начальной кривизны (3.13). Как было отмечено ранее, уравнение движения (3.13) имеет нелинейный характер, вызванный геометрической нелинейностью буровой колонны, и рассматривает влияние начальной кривизны на поведение системы.

Для определения решения системы (3.13) с шарнирно опертыми граничными условиями был использован известный метод разделения переменных Бубнова-Галеркина. В [16] было показано, что этот метод позволяет успешно анализировать поведение бурильной колонны для вертикальных и горизонтальных нефтяных скважин. Согласно методу Бубнова-Галеркина решение представляется в следующем виде:

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \quad (4.1)$$

где $f_i(t)$ – неизвестные функции времени, $\sin(i\pi z/l)$ – моды изгибных колебаний бурильной колонны.

Очевидно, что начальная кривизна имеет гладкую форму. Таким образом, ее можно также представить в виде серии тригонометрических функций. Ожидается, что начальная кривизна имеет случайную форму в предположении случайного характера коэффициентов тригонометрического ряда

$$u_0(z, \xi) = \sum_{i=1}^n A_i(\xi) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \quad (4.2)$$

где $A_i(\xi)$ – независимые гауссовские случайные коэффициенты.

После подстановки рядов (4.1), (4.2) в уравнение (3.13) получаем нелинейную систему дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных функций $f_i(t)$.

Метод Бубнова-Галеркина и дальнейшее численное решение были выполнены в прикладной программе символического вычисления – Wolfram Mathematica 11. Для реализации численного решения уравнений был применен stiffness switching метод.

Численные расчеты проводились для стальной бурильной колонны при следующих значениях параметров: $E = 2.1 \times 10^5 \text{ МПа}$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 0.28$, внешний диаметр колонны $D = 0.2 \text{ м}$, внутренний диаметр $d = 0.12 \text{ м}$, $A = 2.01 \times 10^{-2} \text{ м}^2$, $T = 2.2 \times 10^3 \text{ Н}$, $I_y = 6.84 \times 10^{-5} \text{ м}^4$, $l = 200 \text{ м}$. Кроме того, предполагается, что сжимающая нагрузка постоянна и распределена по длине стержня.

Расчеты были проведены для 12 мод, и можно заключить, что основной вклад в динамику колебаний вносят первые моды. С ростом номера моды ее вклад уменьшается (рисунок 68 (а)). Более того, если нет начальной кривизны, можно показать, что изгибные колебания не появятся на четных режимах [126]. На рисунке 68 (б) показаны четыре симуляции для фиксированного поперечного сечения ($z = 0,5l$), где $u_1(t)$ решение уравнения (3.13) в случае отсутствия начальной кривизны и других $u_2(t)$, $u_3(t)$, $u_4(t)$ решений со случайной формой кривизны. Максимум амплитуд случайных форм лежит в диапазоне от 0,5 см до 2 см. На рисунках 69 (а) и 69 (б) показаны те же решения по всей длине колонны при $t=200\text{с}$ и $t=600\text{с}$, соответственно. Видно, что небольшая начальная кривизна слабо влияет на амплитуду колебаний системы, но она значительно влияет на частотные характеристики.

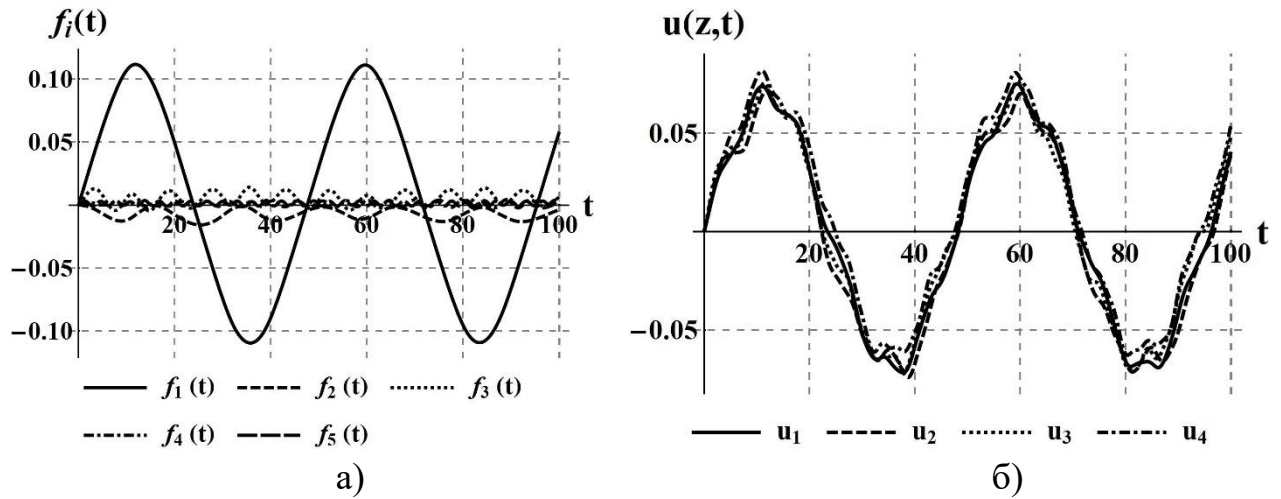


Рисунок 68 – Первые пять мод (а) и четыре симуляции Монте-Карло (б) для фиксированного поперечного сечения

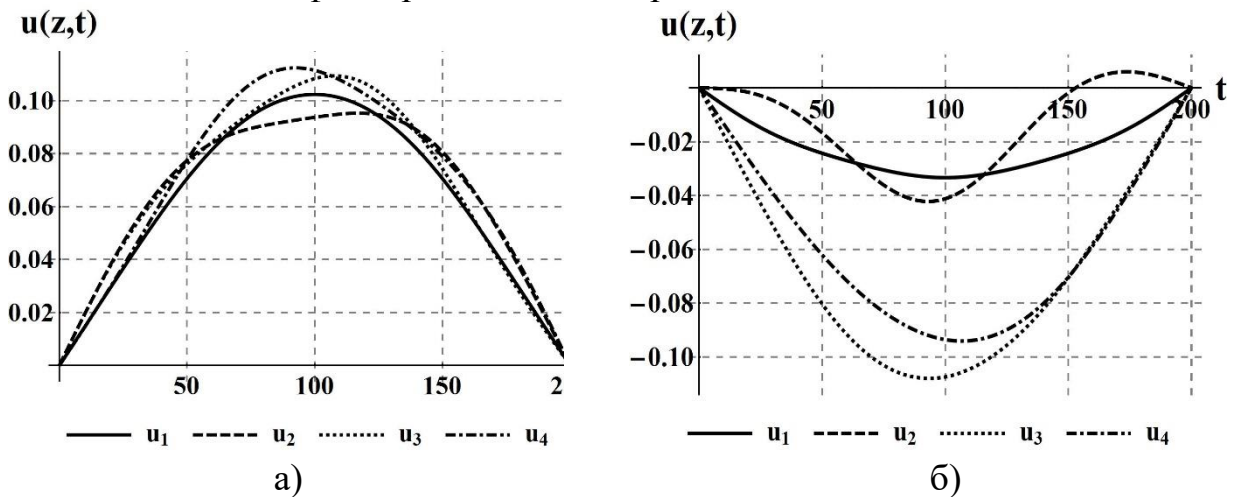


Рисунок 69 – Четыре симуляции по длине штанги при а) $t = 200$ с, б) $t = 600$ с

Как уже было отмечено, малая начальная кривизна приводит к небольшому увеличению амплитуды колебаний и значительно влияет на частотные характеристики системы, поэтому в динамике буровой колонны нет деструктивных колебаний. Однако картина может значительно измениться, если рассмотреть реальную начальную кривизну структурных элементов. Тем не менее, разработанный подход позволяет оценить ее, необходимо только сделать другие предположения о характере распределения случайных коэффициентов на основе статистических данных.

4.2 Динамика горизонтальной буровой штанги с учетом случайной силы трения

Ранее в разделе 3.3 была представлена модель движения горизонтальной буровой штанги с учетом влияния сил трения о стенки скважины (3.30), которая в последствие была приведена к виду (3.36) с краевыми условиями (3.37)-(3.38).

4.2.1 Дискретная и стохастическая модели

Для дискретизации модели используется метод сосредоточенных масс, согласно которому, буровая колонна представлена конечным числом N равноудаленных точечных масс, соединенных безмассовыми упругими элементами длиной $2l = L / (N - 1)$, с параметрами E, A . Масса каждого элемента сосредоточена на нейтральной оси колонны в середине отрезка $2l$.

В дискретном представлении модель (3.36)-(3.38) примет вид: на левом конце буровой колонны $x = 0$:

$$u_1 - u_0 = -\frac{lF_{sta}}{EA} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{1}{3l^2}(2u_0 - 3u_1 + u_2) = -\frac{\mu g}{Lc^2} \text{sgn}(\dot{u}_1) \quad \text{при } j=1, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{1}{4l^2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) = -\frac{\mu g}{Lc^2} \text{sgn}(\dot{u}_j) \quad \text{при } j = \overline{2, N-2}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 u_{N-1}}{\partial t^2} - \frac{1}{3l^2}(u_{N-2} - 3u_{N-1} + 2u_N) = -\frac{\mu g}{Lc^2} \text{sgn}(\dot{u}_N) \quad \text{при } j = N-1, \quad (4.6)$$

на правом конце буровой колонны $x = 1$:

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2} + \frac{(\rho A)L}{m_{bit}}(u_N - u_{N-1}) = \frac{F_0}{m_{bit}Lc^2} \sin\left(\frac{\omega_f t}{c}\right) + \frac{1}{m_{bit}Lc^2} f_{bit}(Lc\dot{u}_N) \quad (4.7)$$

Начальные условия в узлах принимались нулевыми, т.е.

$$u_j|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (4.8)$$

Для стохастической модели, так же как и Ritto [67], мы предполагаем, что сила трения носит случайный характер, в частности коэффициент трения. Таким образом мы определяем случайное поле $\{\nu(x): x \in [0, L]\}$ как набор вещественных случайных величин из вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) ,

где Ω – пространство элементарных событий, \mathcal{F} – σ -алгебра, P – вероятностная мера.

Предполагается, что ν – стационарное усеченное Гауссово случайное поле на $[0, L]$ с экспоненциальной автокорреляционной функцией

$$R(x_1, x_2) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|x_2 - x_1|}{b}\right), \quad (4.9)$$

где b – корреляционная длина, которая характеризует затухание автокорреляционной функции.

Далее стохастическое поле ν разлагается в ряд Карунена-Лоэва [136]:

$$\nu(x, \xi) = \underline{\mu}(x) + \sum_{k=1}^N \sqrt{\lambda_k} Z_k(\xi) \varphi_k(x), \quad (4.10)$$

где $\underline{\mu}$ – среднее значение коэффициента трения, λ_k и φ_k – k -ое собственное значение и k -й собственный вектор автокорреляционной функции, Z_k – независимые случайные величины стандартного Гауссова распределения, N – определяет точность разложения.

Для того чтобы найти собственные значения и собственные вектора, необходимо решить однородное интегральное уравнение Гельмгольца II-го рода:

$$\int_0^L R(x_1, x_2) \varphi(x_2) dx_2 = \lambda \varphi(x_1) \quad (4.11)$$

После несложных преобразований мы получим дифференциальное уравнение:

$$\varphi''(x) + \omega^2 \varphi(x) = 0 \quad (4.12)$$

с граничными условиями вида

$$\begin{cases} c\varphi(L) + \varphi'(L) = 0 \\ c\varphi(0) - \varphi'(0) = 0 \end{cases}, \quad (4.13)$$

где $c = \frac{1}{b}$, $\omega^2 = \frac{2c\sigma^2 - c^2\lambda}{\lambda}$.

Решая систему (4.12)-(4.13) получим:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{\cos[\omega_k(x - \frac{L}{2})]}{\sqrt{\frac{L}{2} + \frac{\sin[\omega_k L]}{2\omega_k}}}, k - \text{нечетное}, \\ \frac{\sin[\omega_k(x - \frac{L}{2})]}{\sqrt{\frac{L}{2} - \frac{\sin[\omega_k L]}{2\omega_k}}}, k - \text{четное}. \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\lambda_k = \sigma^2 \frac{2b}{1 + (\omega_k b)^2} \quad (4.15)$$

где ω_k – отсортированные положительные корни характеристического уравнения:

$$(1 - b\omega \operatorname{tg}[\frac{\omega L}{2}])(b + \omega \operatorname{tg}[\frac{\omega L}{2}]) = 0. \quad (4.16)$$

Сила трения (на единицу длины) запишется в следующем виде:

$$F_{fric}(\dot{u}(x, t), \xi) = -v(x, \xi)(\rho A)g \operatorname{sgn}(\dot{u}(x, t)) \quad (4.17)$$

4.2.2 Численный анализ модели

Полученная система из 101 нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка решалась с помощью пакета символьной математики Wolfram Mathematica (WM). Расчеты по анализу динамической модели проводились, при следующих геометрических и физических параметрах горизонтальной буровой колонны, а также действующих на нее нагрузках: $E = 210$ ГПа; $\rho = 7850$ кг/м³; $g = 9.81$ м/с²; $D_i = 0.10$ м (внутренний диаметр); $D_o = 0.15$ м (внешний диаметр): $L/D_o = 400$; $m_{bit} = 20$ кг; $c_1 = 1,4 \times 10^3$ Н; $c_2 = 400$; $\underline{\mu} = 0.1$; $\sigma = 0.1 \times \underline{\mu}$; $b = 10$; $\omega_f = 100 \times 2\pi / 60$ рад/с; $t \in [0, 10]$ с; $f_{sta} = 5500$ Н; $F_0 = 550$ Н. Начальные условия в узлах принимались нулевыми.

Были получены величины перемещений и ускорений буровой штанги в аппроксимирующих ее узлах на заданном временном интервале для нескольких симуляций методом Монте Карло. Определены перемещения (рисунок 70 (а)) и скорость движения бура (рисунок 70 (б)), а также отношение мощности на входе бура к мощности на выходе бура (рисунок 71), являющееся показателем эффективности производимых буровых работ.

Рисунок 71 свидетельствует о наличии осциллирующего процесса в буровой колонне, стремящегося к «занулению» скорости движения бура. Результаты исследований, представленные на рисунке 71, свидетельствуют, что

эффективность бурильного процесса близка к 25%. Причиной потерь энергии являются указанные в рассмотренной модели и действующие на буровую штангу нагрузки в виде сил трения, реакции со стороны породы на бур и др.

Полученные результаты качественно и количественно согласуются с результатами работы Ritto [67], где расчеты динамической модели проводились методом конечных элементов. Анализ результатов исследований свидетельствует об эффективности применения метода сосредоточенных параметров для решения нелинейных задач динамики стержневых элементов.

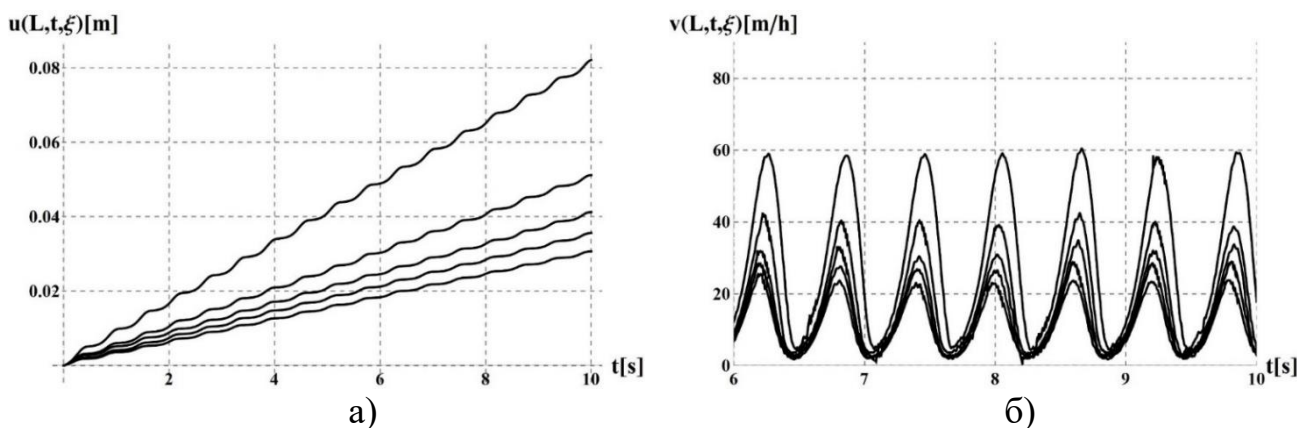


Рисунок 70 – Четыре симуляции Монте Карло для а) перемещения и б) скорости движения бура

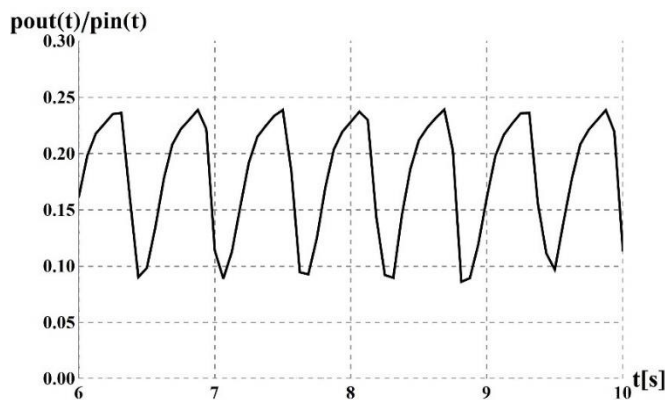


Рисунок 71 – Динамика отношения мощности на входе бура к мощности на его выходе

4.3 Динамика вертикальной буровой штанги с учетом случайной силы трения

Рассматривается задача движения вертикальной буровой штанги с учетом влияния сил трения о стенки скважины (3.21)-(3.22). Также, как и в разделе 4.2, предполагаем, что сила трения носит случайный характер, в частности коэффициент трения. По аналогии с предыдущим разделом, мы определяем случайное поле $\{v(z) : z \in [0, 2\pi]\}$ как набор вещественных случайных величин из

вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) , где Ω – пространство элементарных событий, \mathcal{F} – σ -алгебра, P – вероятностная мера.

Предполагается, что v – стационарное усеченное Гауссово случайное поле на $[0, 2\pi]$ с экспоненциальной автокорреляционной функцией, т.е. мы считаем, что поле задано по периметру буровой скважины.

$$R(z_1, z_2) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|z_2 - z_1|}{b}\right), \quad (4.18)$$

где b – корреляционная длина, которая характеризует затухание автокорреляционной функции.

Далее стохастическое поле v разлагается в ряд Карунена-Лоэва согласно формуле (4.10), а собственные значения и собственные вектора находятся решая однородное интегральное уравнение Гельмгольца II-го рода (4.11).

После чего сила трения и контактного взаимодействия для компонент $u(z, t)$ и $v(z, t)$ запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_{fric}^u &= \frac{F}{r} \left(u + \text{sign}(\Phi) v(t, \xi) v \right) \delta(z - z_c), \\ F_{fric}^v &= \frac{F}{r} \left(v - \text{sign}(\Phi) v(t, \xi) u \right) \delta(z - z_c) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Общность и достоверность нелинейной модели (3.21)-(3.22) позволяет получать из нее частные модели при тех или иных допущениях, и в качестве примера представим линейный случай, т.е. случай при допущении малости деформаций.

Модель движения буровой штанги при малых деформациях (геометрическая линейность) с учетом случайного контактного взаимодействия и трения штанги о стенку скважины:

$$\begin{aligned} \rho \left(-A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 A u + 2\omega A \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial u}{\partial z} \right) - EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \\ + \frac{F}{r} \left(u + \text{sign}(\Phi) v(t, \xi) v \right) \delta(z - z_c) = 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega^2 A v + 2\omega A \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial v}{\partial z} \right) - EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \\ + \frac{F}{r} \left(v - \text{sign}(\Phi) v(t, \xi) u \right) \delta(z - z_c) = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь нелинейность модели проявляется за счет нелинейности сил контактного взаимодействия штанги со стенками скважины и сил трения.

Численный анализ нелинейной модели (3.21)-(3.22) проводится для случая с шарнирно-опертыми граничными условиями, учитывая, что на краях предполагается наличие стабилизирующих устройств. Это позволяет использовать метод Бубнова-Галеркина, представляя решение математической модели в виде суммы ряда гармонических функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям:

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \sum_{i=1}^n f_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right), \\ v(z,t) &= \sum_{i=1}^n g_i(t) \sin\left(\frac{i\pi z}{l}\right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Расчёты проводились для стальной штанги с плотностью материала $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, модулем Юнга $E = 2.1 \times 10^5 \text{ МПа}$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,28$, с внешним диаметром $D = 0.2 \text{ м}$ и внутренним диаметром $d = 0.12 \text{ м}$, площадью поперечного сечения штанги $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \approx 2,01 \times 10^{-2} \text{ м}^2$, моментом инерции кольцевого сечения $I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \approx 6,84 \times 10^{-5} \text{ м}^4$, длиной штанги $l = 300 \text{ м}$, частотой ее вращения $\omega = 15 \text{ об/мин}$, продольной сжимающей нагрузкой $T = 2.2 \times 10^3 \text{ Н}$, жесткостью Герца $K_h = 6.78 \times 10^{11} \text{ Нм}^{-1.5}$, $\mu = 0.1$ и зазором $b_{cl} = 0.05 \text{ м}$, $c_1 = 1.4 \times 10^3 \text{ Н}$; $c_2 = 400$; $\underline{\mu} = 0.1$; $\sigma = 0.1 \times \underline{\mu}$; $b = 10$.

На рисунках 72 (а) и 72 (б) представлены 5 симуляций Монте Карло для компонент изгибных колебаний $u(t)$ и $v(t)$, соответственно. Можно отметить, что случайная природа силы трения вносит ощутимые шумы в результирующие поперечные колебания вдоль осей OX и OY . Тем самым дальнейшее изучение стохастических моделей позволит давать ожидаемые в среднем возможные перемещения оси буровой колонны.

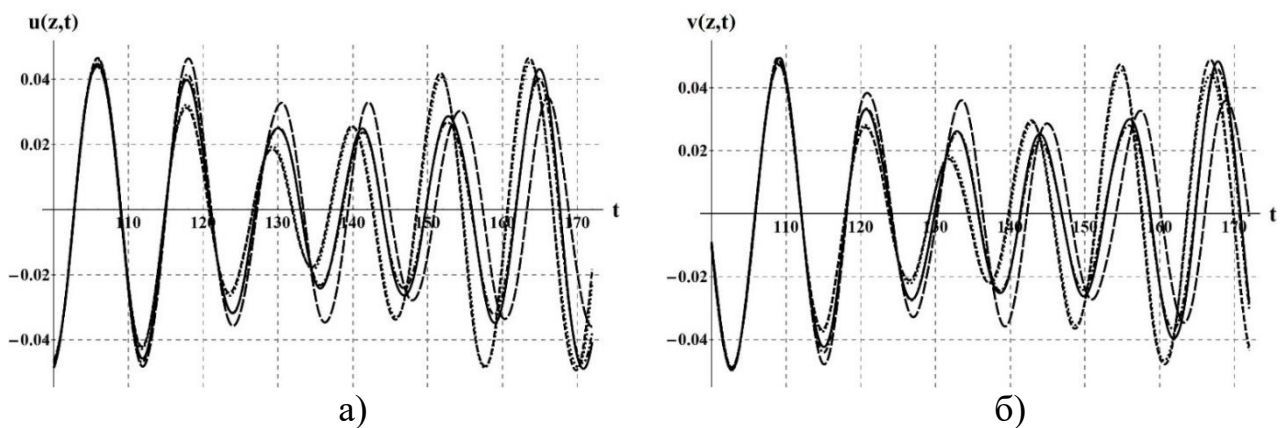


Рисунок 72 – Пять симуляций Монте-Карло изгибных колебаний для а) $u(z,t)$, б) $v(z,t)$ компонент перемещений

Таким образом, в данном разделе был проведен численный анализ стохастической модели (3.21)-(3.22). Результаты исследований представлены графически как изменение амплитуды перемещений буровых колонн во времени. Проведены несколько симуляций Монте Карло и установлено влияние случайной природы контактных сил и сил трения на динамику буровой колонны.

4.4 Краткие выводы по разделу

В данном разделе были разработаны геометрически нелинейные стохастические модели движения буровых колонн, в частности: модель динамики горизонтальной бурильной колонны с учетом случайных сил трения; модель динамики вертикальной бурильной колонны с учетом ее контактного взаимодействия со стенкой скважины, случайной природой силы трения и снятия ограничений на величину деформаций; модель динамики бурильной колонны с учетом случайной начальной кривизны и конечных деформаций для плоского случая. Для каждой из моделей представлены методы дискретизации, метод решения, указано каким образом учитывалась случайная природа начальной кривизны или силы трения.

Была исследована динамика полученных стохастических моделей. Проведен численный анализ моделей с визуализацией перемещений буровой штанги для нескольких симуляций Монте Карло. Изучено влияние параметров буровой колонны, случайной начальной кривизны и силы контактного взаимодействия на ее динамику. Анализ результатов показал необходимость учета неопределенностей для получения и формирования более достоверных и близких к реальным процессам рекомендаций по ожидаемым диапазонам средних перемещений оси буровой колонны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа является научным трудом, в котором разработаны новые математические модели движения бурового оборудования с позиций нелинейной динамики деформируемых сред, развиты методы их анализа.

В диссертации содержатся новые научно обоснованные результаты, совокупность которых является достижением в развитии динамики бурового оборудования.

Основные результаты и выводы диссертационного исследования заключаются в следующем:

1. Для случая малых деформаций изучена многопараметрическая природа движения сжато-скрученной вращающейся буровой штанги, обусловленная соотношением между крутящим моментом и продольной силой, частотой и длиной волны, а также наличием вращения, что позволило установить общую классификацию ее изгибных колебаний, выявляя их для выбранных диапазонов указанных параметров. Для анализа линейных моделей в работе используются метод многих масштабов, а также метод обобщенных функций, дающий возможность определения напряженного состояния стержневых конструкций при разнообразии их параметров на всем диапазоне частот колебаний, а также воздействию на буровую штангу сосредоточенных силовых источников, что эффективно для решения обратных и полу-обратных задач.

2. Для случая конечных деформаций проведен численный анализ изгибно-крутильных колебаний буровой штанги с различной топологией ее изгиба. Установлено: увеличение длины буровой штанги и сжимающей нагрузки ведут к росту амплитуды поперечных колебаний в плоском и пространственном случаях, тогда как амплитуды крутильных колебаний уменьшаются.

С увеличением частоты вращения штанги увеличивается амплитуда изгибно-крутильных колебаний только в плоском случае. В пространственном случае - частота влияет на форму параметрической кривой, описываемой результирующим поперечным изгибом колонны; уменьшение внешнего диаметра колонны ведет к неравномерному увеличению амплитуд изгибно-крутильных колебаний, что свидетельствует о их нелинейной зависимости.

3. Проведено моделирование нелинейных колебаний буровой штанги для случая конечных деформаций с учетом осложняющих факторов: начальная кривизна штанги, трение буровой штанги о стенки скважины, особенность низа бурильной колонны. Установлено:

а) наличие начальной погиби штанги увеличивает амплитуду изгибных колебаний, понижая ее порог устойчивости;

б) наличие контакта со стенками скважины может привести к обрушению стенок. С увеличением длины буровой колонны или продольной нагрузки увеличивается количество контактов буровой колонны со стенками скважины, что вполне ожидаемо, т.к. увеличение этих параметров ведет к увеличению амплитуд изгибных колебаний;

в) в случае учета особенностей низа буровой штанги амплитуда ее изгибных колебаний увеличивается с уменьшением длины консольного пролета и при увеличении длины самой буровой колонны. Незначительный рост амплитуды колебаний наблюдается при увеличении продольной сжимающей нагрузки. Увеличению частоты и амплитуды колебаний наблюдается лишь при увеличении частоты вращения буровой колонны, при этом увеличивается влияние кориолисовых и центробежных сил.

Результаты исследований хорошо согласуются с результатами работ других авторов, изучавших эти задачи в линейной постановке.

4. Разработаны геометрически нелинейные стохастические модели движения буровых колонн: модель динамики горизонтальной бурильной колонны с учетом случайных сил трения; модель динамики вертикальной бурильной колонны с учетом ее контактного взаимодействия со стенкой скважины, случайной природой силы трения и снятия ограничений на величину деформаций; модель динамики бурильной колонны с учетом случайной начальной кривизны и конечных деформаций для плоского случая.

Была исследована динамика полученных стохастических моделей. Проведен численный анализ моделей с визуализацией перемещений буровой штанги для нескольких симуляций Монте Карло. Изучено влияние параметров буровой колонны, случайной начальной кривизны и силы контактного взаимодействия на ее динамику.

Анализ результатов показал необходимость учета неопределенностей для получения и формирования более достоверных и близких к реальным процессам рекомендаций по ожидаемым диапазонам средних перемещений оси буровой колонны.

5. Результаты исследований по моделированию движения буровой штанги с учетом особенностей низа бурильной колонны и ее контактного взаимодействия со стенками скважины рассмотрены и будут применены **ПНТБиП ЦОМЭ филиала АО "Волковгеология"** при расчетах напряженно-деформированного состояния бурового оборудования геотехнологических скважин.

Оценка полноты решений поставленных задач. В результате проведенных исследований в диссертационной работе разработаны математические модели буровых штанг для случая малых (как первые приближения) и больших деформаций изгиба различной топологии. Для анализа линейных моделей в работе используются метод многих масштабов и метод обобщенных функций, которые дают новые возможности в динамическом анализе буровых штанг и в прогнозировании эффективности их работы. Разработаны нелинейные модели буровых штанг с учетом конечных деформаций в рамках нелинейной теории упругости В.В. Новожилова. Рассмотрены случаи действия осложняющих факторов – начальной кривизны оси буровой штанги, особенностей работы низа буровой колонны и сил контактного трения в результате взаимодействия буровых штанг со стенками скважины. Исследованы их стохастические колебания. Проведен численный

анализ моделей, выявлено влияние параметров буровой штанги, сил нагружения и осложняющих факторов на ее колебательный процесс. Указанное подтверждает выполнение в диссертационной работе всех поставленных задач и достижение цели исследования.

Рекомендации по конкретному использованию полученных результатов. Разработанные математические модели движения буровых штанг в осложненных условиях, учитывающие факторы случайности и конечность деформаций, могут найти широкое практическое применение в нефтегазодобывающей промышленности, а также в других областях использования бурового оборудования для уточнения инженерных данных с позиций современных научных методов, исключения опасных режимов движения бурового оборудования из области рабочих частот.

Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области. Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне с использованием новых вычислительных технологий и апробированных методов. Применение в работе сложного математического аппарата нелинейной механики деформируемых сред применительно к задачам моделирования движения бурового оборудования вносит новизну в их исследовательский аппарат. Работа выполнена на уровне лучших достижений в исследуемой области. В ней исследуются малоизученные нелинейные колебания стержневых элементов бурового оборудования.

В связи со сказанным, результаты данной диссертационной работы конкурентоспособны, выполнены на современном научном уровне и максимально адаптированы под реальные условия и режимы бурения неглубинных скважин с возможностью их практического применения в задачах модернизации бурового оборудования в РК.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Вадецкий Ю.В. Бурение нефтяных и газовых скважин. – М.: Недра, 2000. – 424 с.
- 2 Басарыгин А.В., Булатов М.С. Бурение нефтяных и газовых скважин. – СПб.: Интеллект, 2002. – 589 с.
- 3 Алейников А.А. Опыт бурения малого диаметра на пологих угольных пластах // ЦНИ ЭИ уголь. – 1969. – С. 83-87.
- 4 Смоленский В.В. Выбор средств, улучшающих направленность бурения скважин. // Технология добычи угля подземным способом. – 1969. – №12. – С. 32-37.
- 5 Баграмов Р.А. Буровые машины и комплексы. – М.: Недра, 1988. – 675 с.
- 6 Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б. Применение биополимерных растворов для эффективного вскрытия продуктивных горизонтов горизонтальных скважин // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2017. – №312 (2). – С. 161-165.
- 7 Бараев А., Жумабаев М.Ж., Ахметов Н.М., Тулип А.С., Бариев М. Исследование влияния замковых соединений на вынужденный колебательный процесс буровой колонны // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2015. – №300 (2). – С. 44-49.
- 8 Бараев А., Жумабаев М.Ж., Баймишева А., Тулеп А.С. Моделирование динамических процессов в бурильных колоннах при выполнении спускоподъемных операций // Вестник НАН РК. – 2014. – №352 (6). – С. 41-49.
- 9 Бараев А., Жумабаев М.Ж., Баймишева А., Тулеп А.С. Исследования продольных колебаний спускоподъемной системы при торможении бурильной колонны // Вестник НАН РК. – 2014. – №352 (6). – С. 54-59.
- 10 Нугуманов К.К., Исагулов Н.М. Новые технические решения в конструкциях буровых поршней // Вестник КазНТУ. – 2015. – №108 (2). – С. 147-152.
- 11 Асан А.Е., Мендебаев Т.М. Влияние качества и точности изготовления трехшарошечных буровых долот на нагрузочную способность // Вестник КазНТУ. – 2014. – №102 (2). – С. 73-78.
- 12 Yigit A.S., Christoforou A.P. Coupled axial and transverse vibrations of oilwell drillstrings // Journal of Sound and Vibration. – 1996. – Vol. 195 (4). – P. 617-627.
- 13 Christoforou A.P., Yigit A.S. Dynamic modeling of rotating drillstrings with borehole interactions // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – Vol. 206 (2). – P. 243-260.
- 14 Гуляев В.И. и др. Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения // Проблемы прочности. – 2006. – №5. – С. 109-119.

- 15 Гуляев В.И., Худолий С.Н., Борщ Е.И. Колебания кружения конструкции низа бурильной колонны // Проблемы прочности. – 2010. – №6. – С. 13-25.
- 16 Vaz M.A., Patel M.N. Analysis of drill strings in vertical and deviated holes using the Galerkin technique // Engineering structures. – 1995. – Vol. 17 (6). – P. 437-442.
- 17 Nandakumar K., Wiercigroch M. Stability analysis of a state dependent delayed, coupled two DOF model of drill-string vibration // Journal of Sound and Vibration. – 2013. – Vol. 332. – P. 2575–2592.
- 18 Khajiyeva L.A., Kydyrbekuly A.B., Sergaliyev A., Umbetkulova A. Simulation of Movement of Drill Rods at Large Deformations // Advanced Materials Research. – 2013. – Vol.702. – P. 253-258.
- 19 Khajiyeva L.A., Sergaliyev A., Umbetkulova A. Dynamic Analysis of Steel and Dural Drill Rods. // Advanced Materials Research. – 2013. – Vol. 705. – P. 91-96.
- 20 Хаджиева Л.А., Умбеткулова А.Б. Об аппроксимации нелинейных колебаний сжато-скрученной буровой штанги при конечных деформациях // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2014. – №1 (293). – С. 69-75.
- 21 Мардонов Б.М., Хаджиева Л.А. Исследование параметрических колебаний геометрически нелинейной бурильной колонны методом конечных элементов // Тез. докл. VIII Казахст.-Росс. Межд. научно-практ. конф. «Матем. моделирование в научно-технол. и экологич. проблемах нефтегазовой отрасли». – Атырау, 2014. – С. 85-86.
- 22 Wilderman Giles H. Exploration drilling techniques used as a “Field determinant” and data gatherer in mill and plant design // Can.Mining and Met.Bull. – 1973. –Vol. 66 (740). – P. 110-116.
- 23 Версюис Д. Математическая теория фонтанирования нефтяных скважин // Нефтяное хозяйство. – 1931. – №6. – С. 467-473.
- 24 Lunberg B. Energy-transfer in percussive rock destruction. Stress wave transmission through joints // Int.j. Koch Mech. and Mining Sci. – 1973. – Vol. 5. – P. 421-435.
- 25 Jafari A.A., Kazemi R., Mahyari M.F. The effects of drilling mud and weight bit on stability and vibration of a drill string // Journal of Vibration and Acoustics. – 2012. – Vol. 134. – P. 1-9.
- 26 Bambill D.V., Felix D.H., Rossi R.E. Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beams by means of the Differential Quadrature Method // Structural Engineering and Mechanics. – 2010. – Vol. 34(2). – P. 231-245.
- 27 Gulyaev V.I., Gaidachuk V.V., Glushakova O.V. Andronov-Hopf bifurcations in wave models of torsional vibrations of drill strings // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 46 (11). – P. 1275-1283.
- 28 Gulyayev V.I., Borshch E.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011. – Vol. 78, issue 3-4. – P. 759-764.

- 29 Andrusenko E.N., Gulyayev V.I., Khudolii S.N. The buckling of a drill string in a curvilinear borehole with axial line imperfections // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2012. – Vol. 76 (3). – P. 330 – 336.
- 30 Gulyaev V.I., Gaidaichuk V.V., Solov'ev I.L., Gorbunovich I.V. Quasistatic bifurcation states of super-deep vertical drill strings // *J. Mining Science*. – 2010. – Vol. 46(5). – P. 546-553.
- 31 Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Andrusenko E.N. Mechanical Behavior of Drillstring in Curved Boreholes with Local Geometrical Imperfections // *International Applied Mechanics*. – 2011. – Vol. 46(12). – P. 1410-1419.
- 32 Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V. The buckling of elongated rotating drill strings // *J. Petroleum Science and Engineering*. – 2009. – Vol. 67. – P. 140-148.
- 33 Sergaliyev Almaz, Kaplunov Julius, Khajiyeva Lelya. About multi-parametric analysis of drill string vibrations // *Vibration Engineering and Technology of Machinery, Series: Mechanisms and Machine Science*. – 2015. – Vol. 23. – P. 373-377.
- 34 Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 600 с.
- 35 Ерофеев В.И. Нелинейные изгибные и крутильные волны в стержнях и стержневых системах // *Вестник научно-технического развития*. – 2009. – №4 (20). – С. 46-50.
- 36 Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Крутильные волны конечной амплитуды в упругом стержне // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2007. – №6. – С.157-163.
- 37 Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Нелинейные изгибные стационарные волны в балке Тимошенко // *Нелинейный мир*. – 2008. – Т.6, №5–6. – С. 348-358.
- 38 Ерофеев В.И., Семерикова Н.П., Серов А.В. Нелинейные стационарные крутильные волны в упругом стержне // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2008. – №1. – С. 9-10.
- 39 Хаджиева Л.А. Динамика геометрически и физически нелинейных деформируемых элементов механизмов и машин: дис. ... док. ф.-м. наук: 01.02.04, 01.02.06. – Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2007. – 210 с.
- 40 Asghari M., Kahrobaiyan M.H., Ahmadian M.T. A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple stress theory // *International Journal of Engineering Science*. – 2010. – Vol. 48. – P. 1749–1761.
- 41 Zhu K., Chung J. Nonlinear lateral vibrations of a deploying Euler-Bernoulli beam with a spinning motion // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2015. – Vol. 90. – P. 200-212.
- 42 Li Z., Li J. Fundamental equations for dynamic analysis of rod and pipe string in oil-gas wells and application in static buckling analysis // *Journal of Canadian Petroleum Technology*. – 2002 – Vol. 41(5). – P. 44-53.
- 43 Berlioz A., Hagopian J., Dufour R., Draoui E. Dynamic behavior of a drillstring: presentation and validation of the experimental set-up // *ASME Design*

Engineering Division, 14th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise. – Albuquerque, NM, USA, 1993. – Vol. 56. – P. 223-228.

44 Хаджиева Л.А., Умбеткулова А.Б., Сергалиев А.С. Колебания буровых штанг при больших деформациях // Тез. Межд. конференции «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения», посвящ. 75-летию ИМАШ РАН А.А.Благоднарова. – Москва, 2013. – С. 116.

45 Хаджиева Л.А., Умбеткулова А.Б., Сергалиев А.С. О деформациях дюралюминиевых и стальных буровых колонн под действием переменных осевых нагрузок и крутящего момента // V Межд. конф. «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». – Москва, 2013. – С. 742-744.

46 Умбеткулова А.Б., Хаджиева Л.А., Малинников В.В. Об анализе нелинейных колебаний буровых штанг с конечными деформациями // Известия НАН РК. – 2012. – №1. – С.10-14.

47 Вибрации в технике: справочник в 6-ти т. / под ред. Блехмана И.И. – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. – 351 с.

48 Vandiver J.K., Nicholson J.W., Shyu R.J. Case studies of the bending vibration and whirling motion of drill collars // Society of Petroleum Engineers Drilling Engineering. – 1990. – Vol. 5. – P. 282–290.

49 Elsayed M.A., Dareing D.W., Vonderheide M.A. Effect of torsion on stability, dynamic forces, and vibration characteristics in drillstrings // ASME Journal of Energy Resources Technology. – 1997. – Vol. 119. – P. 11–19.

50 Spanos P.D., Sengupta A.K., Cunningham R.A., Paslay P.R. Modeling of roller cone bit lift-off dynamics in rotary drilling // ASME Journal of Energy Resources Technology. – 1995. – Vol. 117. – P. 197–207.

51 Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П. Крутильные и изгибные волны конечной амплитуды в упругих стержнях // Вестник научно-технического развития. – 2008. – №7(11). – С.29-34.

52 Ерофеев В.И. Изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные волны в стержнях // Вестник научно-технического развития. – 2012. – № 5 (57). – С. 3–18.

53 Зинченко А.С. Распространение продольно-изгибных и продольно-крутильных волн в стержне // Научный поиск. – 2012. – № 2(6). – С.38-40.

54 Christoforou A.P., Yigit A.S. Fully coupled vibrations of actively controlled drillstrings // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – Vol. 267. – P. 1029–1045.

55 Christoforou A.P., Yigit A.S. Active control of stick–slip vibrations: the role of fully coupled dynamics // Proceedings of the 12th SPE Middle East Oil Show and Conference. – Bahrain, 2001. – P. 1-7.

56 Tucker R.W., Wang C. An integrated model for drill-string dynamics // Journal of Sound and Vibration. – 1999. – Vol. 224 (1). – P. 123-165.

57 Khajiyeva L., Kudaibergenov A., Kudaibergenov As. The effect of gas and fluid flows on nonlinear lateral vibrations of rotating drill strings // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2018. – Vol. 59. – P. 565-579.

- 58 Sergaliyev A.S., Kaplunov J., Khajiyeva L.A., Martyniuk M. On the dynamics of drilling // *International Journal of Engineering Science*. – 2020. – Vol. 146. – P. 1-14.
- 59 Сергалиев А.С. Нелинейная модель движения буровой штанги с учетом влияния сил трения о стенки скважины // *Вестник НАН РК*. – 2017. – №1(365). – С. 42-48.
- 60 Liang F., Yang X.-D., Zhang W., Qian Y.-J. Dynamical modeling and free vibration analysis of spinning pipes conveying fluid with axial deployment // *Journal of Sound and Vibration*. – 2018. – Vol. 417. – P. 65-79.
- 61 Ghasemloonia A., D. Geoff Rideout, Stephen D. Butt. Analysis of multi-node nonlinear coupled axial-transverse drillstring vibration in vibration assisted rotary drilling // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2014. – Vol. 116. – P. 36-49.
- 62 Lian Zh., Zhang Q., Lin T., Wang F. Experimental and numerical study of drill string dynamics in gas drilling of horizontal wells // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. – 2015. – Vol. 27. – P. 1412-1420.
- 63 Meng Y., Li H., Li G., Zhu Li, Wei Na, Lin N. Investigation on propagation characteristics of the pressure wave in gas flow through pipes and its application in gas drilling // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. – 2015. – Vol. 22. – P. 163-171.
- 64 Novozhilov VV. Foundations of the nonlinear theory of elasticity. New York: Dover Publications; 1999
- 65 Khulief Y.A., Al-Sulaiman F.A., Bashmal S. Vibration Analysis of drillstrings with self-excited stick-slip oscillations. // *Journal of Sound and Vibration*. – 2007. – Vol. 299. – P. 540-558.
- 66 Divenyi S., Savi · M.A., Wiercigroch M., Pavlovskaia E. Drill-string vibration analysis using non-smooth dynamics approach // *Nonlinear Dynamic* - 2012.- V. 70. – P.1017–1035.
- 67 Ritto T.G. Drill String Horizontal Dynamics with Uncertainty on the Frictional Force. *Journal of Sound and Vibration*. – 2013. – Vol. 332. –P.145-153.
- 68 Sergaliyev A.S., Khajiyeva L.A. Flat flexural vibration of drill-string with an initial curvature // *Advances in Mechanism Design II*. – 2017. – Vol. 44. – P. 231-237.
- 69 Kudaibergenov Askat K., Kudaibergenov Askar K., Khajiyeva L.A. Modelling of resonance and stability of drill string nonlinear dynamics // *International Journal of Mechanics*. – 2017. – Vol. 11. – P. 92-100.
- 70 Mamandi A., Kargarnovin M.H., Farsi S. Nonlinear Vibration Solution for an Inclined Timoshenko Beam unde the Action of a Moving Force with Constant/Nonconstant Velocity // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2014. – Vol. 201 (3). – P. 363-383.
- 71 Arvin H., Bakhtiari-Nejad F. Non-linear modal analysis of a rotating beam // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2011. – Vol. 46. – P. 877-897

- 72 Bogdanoff J.L., Goldberg J.E. A new analytical approach to drill pipe breakage II // *Journal of Engineering for Industry*. – 1961. – Vol. 83(2). – P. 101–106.
- 73 Ritto T., Soize C., Sampaio R. et al. Drill-string with uncertainty in the bit-rock interaction // *Proceedings of the 11th Pan-American Congress of Applied Mechanics (PACAM '10)*. – January, 2010.
- 74 Ritto T. G., Soize C., and Sampaio R. Non-linear dynamics of a drill-string with uncertain model of the bit-rock interaction // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2009. – Vol. 44(8). – P. 865–876.
- 75 Ritto T., Soize C., and Sampaio R. Modeling uncertainties for local nonlinearities: application to the drill-string dynamics // *Proceedings of the Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPDYN '09)*. – 2009.
- 76 Ritto T. G., Soize C., and Sampaio R. Probabilistic model identification of the bit–rock interaction-model uncertainties in nonlinear dynamics of a drill-string // *Mechanics Research Communications*. – 2010. – Vol. 37(6). –P. 584–589.
- 77 Ritto T., Soize C., and Sampaio R. Stochastic drill-string dynamics-random weight-on-hook (woh) // *Proceedings of the 13th International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME '09)*. – 2009.
- 78 Ritto T. G., Soize C., and Sampaio R. Stochastic dynamics of a drill-string with uncertain weight-on-hook // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. – 2010. – Vol. 32(3). –P. 250–258.
- 79 Khajiyeva L.A., Sergaliyev A. About Discretization of the Horizontal Drill-string Model with Uncertainty on the Frictional Force by the Lumped Parameters Method // *Applied Mechanics and Materials*. – 2014. – Vol. 665. – pp. 589-592.
- 80 Hakimi H., Moradi S. Drillstring vibration analysis using differential quadrature method // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2010. – Vol. 70. – P. 235–242.
- 81 Сергалиев А.С., Хаджиева Л.А. Метод обобщенных функций в стационарной краевой задаче для уравнения динамики буровой колонны // *Известия НАН РК, серия физ.-мат.* – 2015. – №4. – С.144-150.
- 82 Сергалиев А.С., Хаджиева Л.А. Анализ колебаний горизонтальной буровой штанги методом сосредоточенных параметров // *Известия НАН РК, серия физико-математическая*. – 2014. –№5. – С.64-68.
- 83 Austin E.H. *Drilling Engineering Handbook* // Springer Netherlands. – 1983. – P. 301.
- 84 Assaad F.A. *Drilling Technology in Petroleum Geology*. In: *Field Methods for Petroleum Geologists* // Springer, Berlin. – 2009. – P. 25-40.
- 85 Bennett C.E.G., Parks T.C. Borehole mining. In: *General Geology. Encyclopedia of Earth Science*. Springer, Boston, MA. – 1988. – P. 52-54.
- 86 Ema S., Fujii H., Marui E. Whirling vibration in drilling Part 1: cause of vibration and role of chisel edge // *ASME Journal of Engineering for Industry*. – 1986. – Vol. 108(3). – P. 157–162.

- 87 Tekinalp O., Ulsoy A.G. Modeling and finite element analysis of drill bit vibrations // ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design. – 1989. – Vol. 111(2). P. 148–155.
- 88 Roukema J.C., Altintas Y. Time domain simulation of torsional–axial vibrations in drilling // International Journal of Machine Tools & Manufacture. – 2006. – Vol. 46 – P. 2073–2085.
- 89 Kotsonis S.J., Spanos P. D. Chaotic and Random Whirling Motion of Drillstrings // J. Energy Resour. Technol. - 1997. - Vol. 119(4). - P. 217-222.
- 90 Volmir A.S. Stability of Deformable Systems (in Russian) // Nauka, Moscow. – 1967. – P. 984.
- 91 Ziegler H. Principles of Structural Stability // Blaisdell Publishing Company. – 1968. – P. 150.
- 92 Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
- 93 Гольденвейзер А.Л. Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки // Прикл. мат. и мех. – 1966. – Т. 30(1). – С.94-108.
- 94 Гольденвейзер А.Л. Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек // Прикл. мат. и мех. – 1973. – Т. 37(4). – С. 591–603.
- 95 Kaplunov, J. Nobili, A. A robust approach for analysing dispersion of elastic waves in an orthotropic cylindrical shell // J. Sound Vib. – 2017. – Vol. 401. – P. 23-35.
- 96 Kaplunov, J. Manevitch, L.I. Smirnov, V.V. Vibrations of an elastic cylindrical shell near the lowest cut-off frequency // Proc. R. Soc. – 2016. – Vol. 472(2189). – P. 1-11.
- 97 Goldenveizer A. L., Kaplunov J. D., Nolde E. V. On Timoshenko-Reissner type theories of plates and shells // International Journal of Solids and Structures. – 1993. – Vol. 30(5). – P. 675-694.
- 98 Nayfeh, Ali H. Perturbation methods // John Wiley & Sons. – 1973. P. 437.
- 99 Kevorkian, J., Cole, J. D. Perturbation Methods in Applied Mathematics [1 ed.] // Springer-Verlag New York. – 1981. P. 560.
- 100 Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. – Т.6 (2006), №1(19), с.16-32.
- 101 Алексеева Л.А., Ахметжанова М.М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. 1 стационарные колебания // Математический журнал. – Т.14 (2014), №2(52), с.5-20.
- 102 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М., 1978.
- 103 Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
- 104 Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.-Л.: ОГИЗ, 1947. – 464с.

- 105 Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – Изд. 2-е, переработанное. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
- 106 Вибрации в технике. Справочник: в 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 352 с.
- 107 Тимошенко С.П., Гудтер Дж. Теория упругости / пер.с англ.; под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
- 108 Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 450 с.
- 109 Веричев Н.Н., Ерофеев В.И., Ведяйкина О.И. Нелинейные стационарные изгибно-крутильные волны в упругом стержне // Вестник научно-технического развития. – 2013. – №11(75). – С. 17-24.
- 110 Erofeev V. I., Kazhaev V. V., Orekhova O. I. Intense Flexural and Torsional Waves in an Elastic Bar // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2012. – Vol. 41, № 1. – P. 7–10.
- 111 Баранов Н. А., Родыгин А.В. Изгибно-крутильные колебания стержневой системы // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2008. – Т. 6, № 7. – С. 47-52.
- 112 Распопов А.С. Совершенствование расчета изгибно-крутильных колебаний неразрезных балок и рам // Transport construction. – 2007. – №18. С. 161-166.
- 113 Ведяйкина О.И. Распространение и взаимодействие интенсивных изгибных и изгибно-крутильных волн в элементах конструкций: дис. ... канд. ф.-м. наук: 01.02.04 / Институт проблем машиностроения РАН. – Саратов. 2013. – 102 с.
- 114 Воробьев Ю.С., Шорр Б.Ф. Теория закрученных стержней. – Киев: Наук. думка, 1983. – 188 с.
- 115 Воробьев Ю.С. Уточнение уравнений свободных колебаний вращающихся стержней // Рабочие процессы в турбомашинах и прочность их элементов. – Киев: Наук. думка, 1965. – С. 11–27.
- 116 Аврамов К.В., Галас О.С., Морачковский О.К., Пьер К. Анализ нелинейных изгибно – изгибно-крутильных колебаний вращающихся закрученных стержней с учетом деформации поперечного сечения // Проблемы прочности. – 2009. – № 2. – С. 112–124.
- 117 Hodges D.H. and Dowell E.H. Nonlinear Equations of Motions for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades. – NASA TND-7818, 1974. – P. 52.
- 118 Crespo da Silva M.R.M. and Glynn C.C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I: Equations of motion // J. Struct. Mech. – 1978. – № 6. – pp. 437–448.
- 119 Crespo da Silva M.R.M. and Glynn C.C. Nonlinear flexural-flexural-torsional extensional dynamics of beams // Int. J. Solids Struct. – 1988, № 12. – P. 1225–1234.
- 120 Филиппов А.П. и др. Численные методы в прикладной теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1968. – 250 с.

- 121 Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи: Пер. с англ. – М: Мир, 1999. – 685 с.
- 122 Petzold L. Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* – 1983. – Vol. 4, No. 1. – P. 136-148.
- 123 А.К. Кудайбергенов, Аск.К. Кудайбергенов. Сравнительный анализ численных методов при моделировании нелинейной динамики буровых штанг // *Известия НАН РК, серия физ.-мат.* – 2015. – №3 (301). – С. 37-42.
- 124 Sergaliyev A.S., Khajiyeva L.A. Modelling of nonlinear lateral and flexural vibrations of drill strings // *International Journal of Mathematics and Physics.* – 2015. – Vol. 6, No. 2. – P. 41-48.
- 125 Kudaibergenov Askar K., Kudaibergenov Askat K. Modelling of coupled nonlinear axial and lateral vibrations of drill strings // *International Journal of Mathematics and Physics.* – 2015. – Vol. 6, No. 2. – P. 27-35.
- 126 Sergaliyev A., Umbetkulova A.: Numerical simulation of drill-string dynamics with an initial curvature // *Applied Mechanics and Materials.* – 2015. – Vols. 799-800. – P. 523-527.
- 127 Wenbin Yu, Dewey H. Hodges, Vitali Volovoi, Carlos E.S. Cesnik: On Timoshenko-like modeling of initially curved and twisted composite beams // *International Journal of Solids and Structures.* – 2002. – No.39. – P. 5101-5121.
- 128 Kala Z.: Stability problems of steel structures in the presence of stochastic and fuzzy uncertainty // *Thin-Walled Structures.* - 2007. – No.45. – P. 861-865.
- 129 Проценко О.П. Об устойчивости цилиндрической оболочки с начальной погибью под действием апериодических сил осевого сжатия // *Прикладная механика.* - 1965. - т. 1. - №3. - С. 27-34.
- 130 Askhat Kudaibergenov, Askhar Kudaibergenov, Lelya Khajiyeva, in *Applied Mechanics and Materials.* Vol. 665. p. 593-596 (2014).
- 131 Goldsmith W. *Impact: The Theory and Physical Behaviour of colliding solids.* – New York: Dover Publications, Inc., 2001 – 389 p.
- 132 Sadler J. P. A lamped parameter approach to the kineto-elastodynamic analysis of mechanisms. // *Doctoral dissertation.* - Rensselaer Polytechn. Institute, 1971.
- 133 Jansen J.D. Whirl and chaotic motion of stabilized drill collars // *SPE Drilling Eng.* – 1992. –Vol. 7, No.2. – P. 107-114.
- 134 Leine R.I., Van Campen D.H., Keulties W.J.G. Stick-slip whirl interaction in drillstring dynamics // *J. Vib. Acoustics.* – 2002. – Vol. 124. – P. 209-220.
- 135 Soize C. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics // *Probabilistic Engineering Mechanics.* – 2000. – Vol. 15. – P. 277-294.
- 136 Roger G.G., Pol D. Spanos. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach* // Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1991.
- 137 Сергалиев А.С., Хаджиева Л.А. О дискретизации модели колебаний горизонтальной буровой штанги методом сосредоточенных параметров. // *Тез.*

докл. VIII Казахст.-Росс. Межд. научно-практ. конф. «Матем. Моделирование в научно-технол. и экологич. Проблемах нефтегазовой отрасли». – Атырау, 20-21 июня 2014. – С. 110-111.

138 Сергалиев А.С., Абдраимова Г.А., Бекенов Е.Т., Хаджиева Л.А. Развитие современных методов моделирования и анализа буровых скважин в добывающей промышленности // Сборник трудов VIII-й международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы урановой промышленности». – Астана, 3-5 августа 2017. – С. 94-101.

139 Сергалиев А.С., Абдраимова Г.А., Кудайбергенов А.К., Хаджиева Л.А. Применение цифровых технологий для моделирования движения буровых колонн при создании геотехнологических скважин // Сборник трудов IX-ой международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы урановой промышленности». – Алматы, 7-9 ноября 2019. – С. 364-374.